→ classificare le coniche in $AG(2,\mathbb{R})$

→ luoghi/punti significativi per le coniche stesse

CENTRO
DIAMETRO
ASINTOTO
(nozioni affini)

ASSE
FUOCO
(euclidee).

Asse di una conica = DIAMETRO ORT. AL PROPRIO POLO

CIRCONFERENZA = CONICA CHE PASSA PER I PUNTI CICLICI DEL PIANO

$$J_\infty = [(1, i, 0)]$$
$$\overline{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$$

N.B. visto che si tratta di coniche reali se $J_\infty \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{J}_\infty \in \mathcal{C}$.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + x_3(\text{———}) = 0$$

$$a_{11}\cdot 1 + 2a_{12}\, i + a_{22}(-1) = 0$$

$\rightarrow a_{12} = 0$ perché eq. reale.

$a_{11} = a_{22}$

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$\downarrow$

in coordinate affini.

$$a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$$

$a \neq 0 \rightarrow$ vogliamo eq. di II grado.

$$x^2 + y^2 + 2\frac{b}{a}x + 2\frac{c}{a}y + \frac{d}{a} = 0$$

$$x^2 + 2\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + y^2 + 2\frac{c}{a} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d}{a} = 0$$

$\alpha = \frac{-b}{a}$ $\qquad \beta = -\frac{c}{a}$ $\qquad \gamma = \frac{d}{a}$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$$

$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$ circ.

$\mathcal{C}$ = luogo dei punti a distanza $\alpha^2+\beta^2-\delta$ dal punto (α,β).

Equazioni degli assi.

1) coniche a centro

1.a) circonferenze

1.b) iperboli e ellissi $\neq$ circonferenze

2) parabole.

1)
$$[(l,m,0)]A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$$(*)\ (la_{11}+ma_{12})x_1+(la_{12}+ma_{22})x_2+(la_{13}+ma_{13})x_3=0$$

$\overline{n}=[(la_{11}+ma_{12},\ la_{12}+ma_{22})]$

é ortogonale al diametro di eq $(*)$

un diametro (*) é ortogonale al proprio polo $[(\ell, m, 0)]$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \ell a_{11}+m a_{12} & \ell a_{12}+m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

$$(\Delta)\quad \ell m\, a_{11} + (m^2-\ell^2)\, a_{12} - \ell m\, a_{22} = 0$$

OSS (Δ) se $a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=0$ è sempre soddisfatta

$\Rightarrow$ Δ é sempre soddisfatta se (e solo se) $\mathcal{C}$ è una circonferenza

$\rightarrow$ OGNI DIAMETRO DI UNA CIRCONFERENZA É UN ASSE.

se ℓ non è una circonferenza.

- $\ell = 0$; $m \neq 0$ è soluzione

$\Rightarrow (m^2 - 0) a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$

e l'equazione diventa

$$\ell m (a_{11} - a_{22}) = 0$$

$\Rightarrow$ anche $\ell \neq 0$, $m = 0$ è soluzione.

$\downarrow$

$\exists$ 2 assi ortogonali e paralleli risp. alle rette $x = 0$ e $y = 0$

ALTRIMENTI $m \neq 0$ come soluzione e dividiamo (*) per m^2.

$$\xi = \frac{\ell}{m}$$

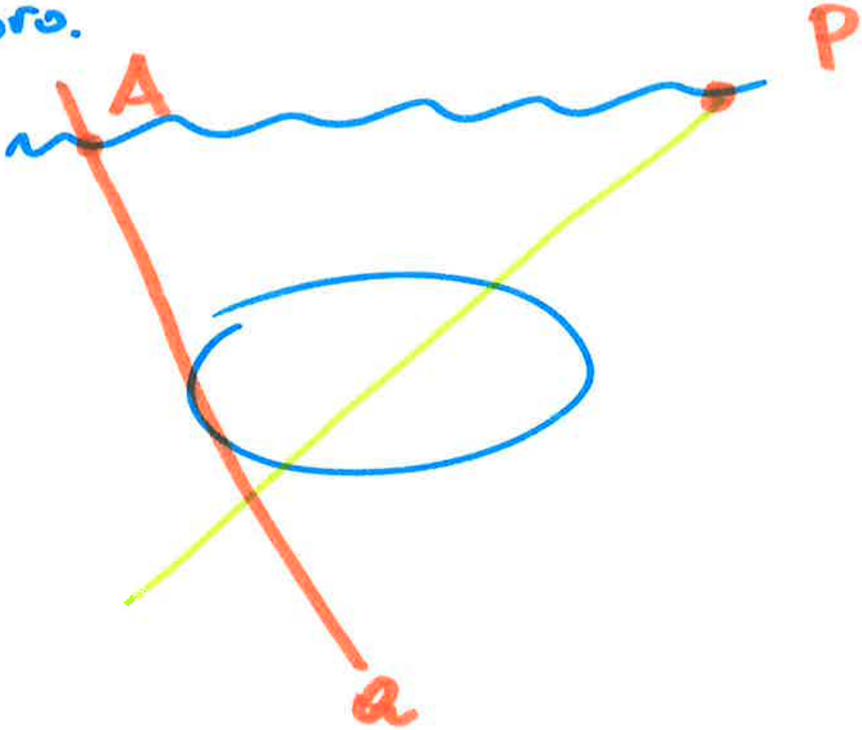
$$\xi^2 a_{12} + \xi (a_{22} - a_{11}) - a_{12} = 0$$

In particolare questa eq. ha sempre 2 soluzioni ed il loro prod. è -1

$$-1 = \frac{-a_{12}}{a_{12}}.$$

Quindi si ottengono 2 rette che hanno poli ortogonali ma che sono anche ortogonali ai propri poli $\Rightarrow$ 2 rette ortogonali fra loro.

N.B: Quando gli assi si sa che sono 2 si può dimostrare anche direttamente che sono ortogonali fra loro.



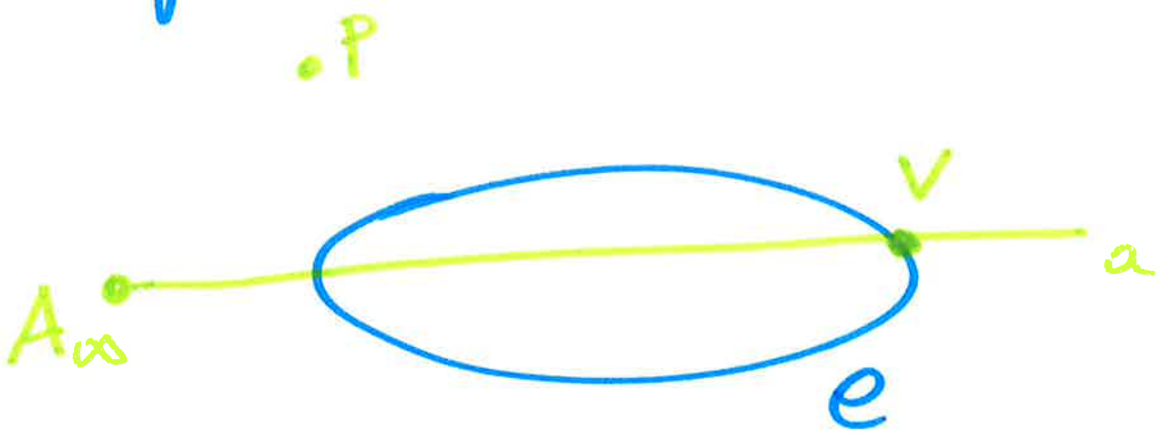
a = asse di direzione A e polo P

$\Rightarrow P \perp A$. calcolate $A^{\perp e} = a'$ questa è

la polare di un punto di a è
quindi passa per il polo di $a = P$
e dunque ha direzione data da P
perché P punto improprio, ma $P \perp A$
ove A = polo di a' $\Rightarrow$ a' è un asse.

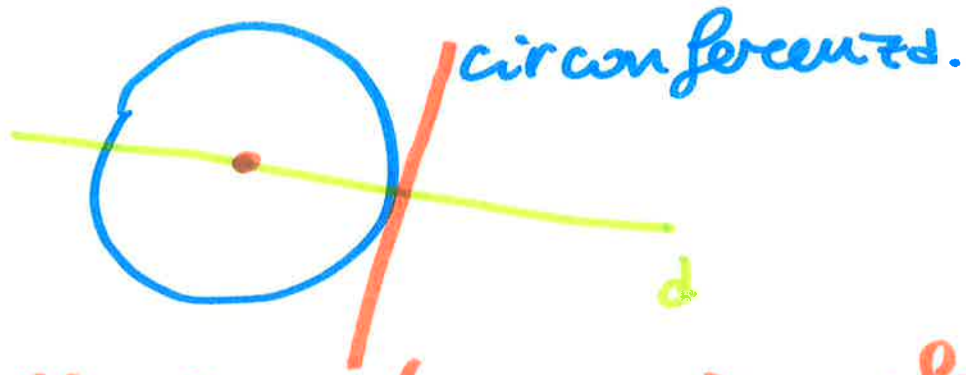
OSS 2:

Sia V un vertice di una conica (= intersezione di $\mathcal{C}$ con un asse).
Allora la tg in V a $\mathcal{C}$ è ortogonale al diametro di $\mathcal{C}$ passante per V.
(= asse per V).

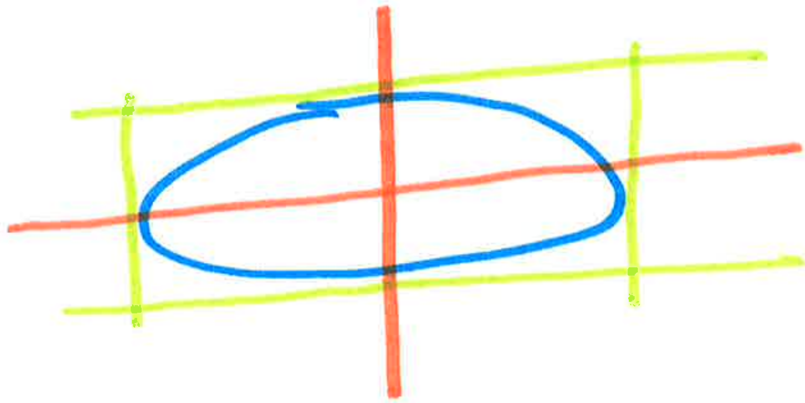


V vertice
a = asse per V
P = polo di A.

tg a $\mathcal{C}$ in V = polare di V perché $V \in \mathcal{C} \Rightarrow$ essa passa per il polo di a perché $V \in a$ e dunque è $\perp a$



la retta tg. ad una circonferenza in un suo punto è la retta ⊥ al diametro in quel punto e che passa per esso.



ASSI DI UNA PARABOLA.

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

IL CENTRO DI UNA PARABOLA È IL SUO PUNTO IMPROPRIO

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e con $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$

se la soluzione del sistema è

$[(1,0,0)] \Rightarrow$ abbiamo

$a_{11}=0$ e $a_{12}=0$

se $(a_{11}, a_{12}) \neq (0,0) \Rightarrow x_2=0$ non

è soluzione e possiamo dividere

per x_2^2

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi + a_{22} = 0$$

$$\xi = \frac{-a_{12}}{a_{11}}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

CENTRO $= [(-a_{12}, a_{11}, 0)]$

vogliamo trovare l'asse.

visto che per una parabola tutti

gli assi sono paralleli dobbiamo

trovare la polare del punto ortogonale

al centro

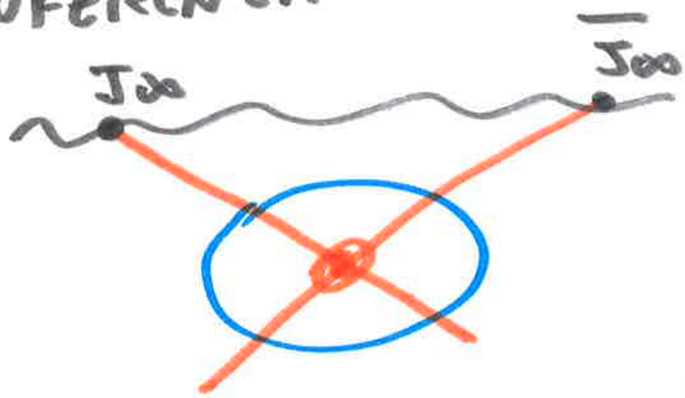
ovvero di $[(a_{11}\ a_{12}\ 0)]$

$$(a_{11}\ a_{12}\ 0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

N.B. Una parabola ha un unico asse ed un unico vertice.

Fuochi di una conica.

1) CIRCONFERENZA



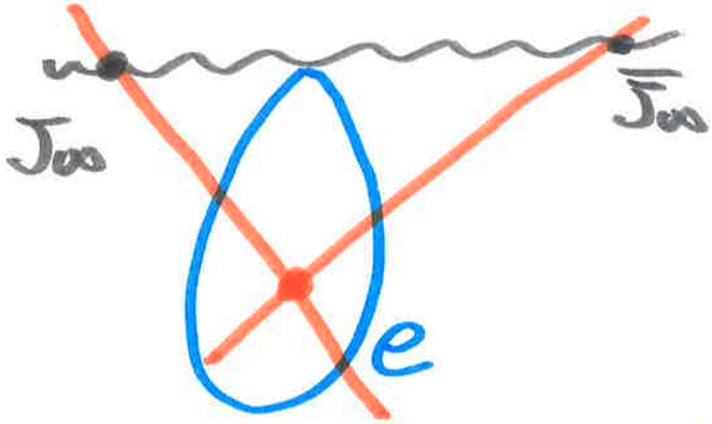
per J_∞ passa un'unica tg. alla circonferenza e questa è un diametro. (perché polare di un punto improprio) → è pure un asintoto.

Idem per $\overline{J}_\infty$ → ∃! intersezione fra le 2 tg.

e questo è il centro della circonferenza.

FUOCO = CENTRO.

2) PARABOLA

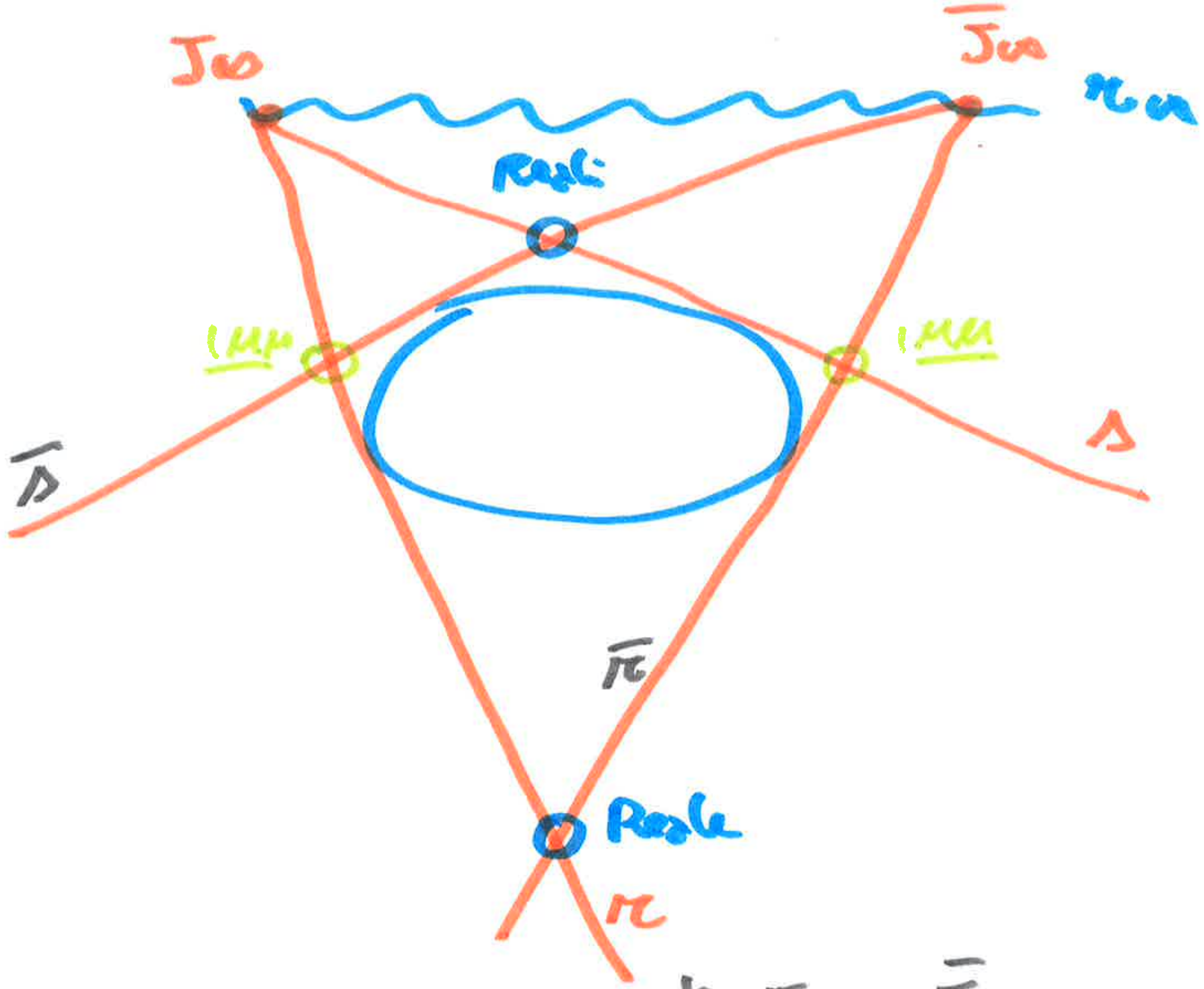


e tangente in C alla retta impropria.

per J_∞ passano 2 tg. alla parabola ma una è la retta impropria.

per $\overline{J}_\infty$ similmente 2 tg. di cui una la retta impropria e la tg. immaginaria per J_∞ è coniugata a quella per $\overline{J}_\infty$ ⇒ intersezioni delle tg proprie → 1 ed 1 solo punto reale ⇒ ∃! fuoco.

3) coniche a centro ≠ circonferenze.



per ciascuno dei 2 pti J_∞ e $\bar{J}_\infty$ passano 2 tangenti a $\mathcal{C}$ e tali tangenti sono coppie di rette immaginarie tali che se le tg. per J_∞ sono $r \cup s$ $\Rightarrow$ le tg per $\bar{J}_\infty$ sono $\bar{r} \cup \bar{s}$.

OSSERVIAMO CHE $r \cap \bar{r}$ e $s \cap \bar{s}$ SONO PUNTI REALI MENTRE $r \cap \bar{s}$ e $s \cap \bar{r}$ SONO 2 PUNTI IMM. E CONIUGATI.

Vogliamo studiare eventuali prop. geometriche delle coniche generali (senza troppi conti).

→ DESCRIZIONI COME LUOGHI

→ SIMMETRIE.

↓

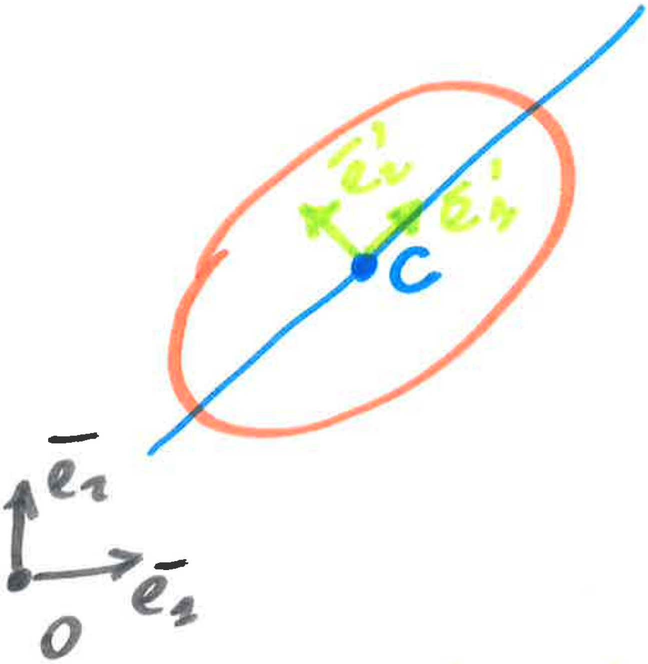
cerchiamo dei riferimenti euclidei rispetto cui le equazioni delle coniche siano particolarmente semplici e ragioniamo algebric. su quello che otteniamo.

↓

scegliere un punto e una base per $\mathbb{R}^2$ ortogonale

→ $\mathcal{C}$ conica a centro → scegliere come origine il centro della conica.

se $\mathcal{C}$ ha 2 assi ortogonali → prendere quelli come direzioni dei vettori della base. (mediante matrici ortogonali).



$$a_{11}x_1^2 + \cancel{2a_{12}x_1x_2} + \cancel{2a_{13}x_1x_3} + a_{22}x_2^2 + \cancel{2a_{23}x_2x_3}$$

$$+ a_{33}x_3^2 = 0$$

GLI ASSI DEVONO AVERE EQ.

$x_1 = 0$

e

$x_2 = 0$

$a_{12} = 0$ gli assi devono passare per $(0\ 0\ 1)$ il centro è $(0\ 0\ 1)$.

$$(1\,0\,0)\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{13}x_3$$

$$(0\,1\,0)\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

Devono passare entrambe per

$(0\,0\,1)$

$a_{13} = 0$ e $a_{23} = 0$

$\left[a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \right]$ eq. generica conica a centro.

$\downarrow$

$$a x^2 + b y^2 + c = 0$$

quando è una ellisse. $\iff$ $a_{11}a_{22} = \det A^* > 0$

$\iff$ a_{11} a_{22} hanno lo stesso segno.

$\downarrow$

$a_{11} > 0$ $a_{22} > 0$

$\cancel{a_{11} = a^{-2} \quad a_{22} = b^{-2}}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -c$$

$a_{11} = \frac{1}{a^2}$ $a_{22} = \frac{1}{b^2}$

$c < 0 \Rightarrow$ esistono punti reali

$c > 0 \Rightarrow$ l'ellisse è priva di punti reali.

possiamo anche dividere per c.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

<u>Iperboli</u>

$$a_{11} a_{22} < 0$$

$$\cancel{a_{11} = \frac{1}{ca^2}} \quad \cancel{a_{22} = \frac{1}{}}$$

$$\left|\frac{a_{11}}{a_{33}}\right| = \frac{1}{a^2}$$

$$\left|\frac{a_{22}}{a_{33}}\right| = \frac{1}{b^2}$$

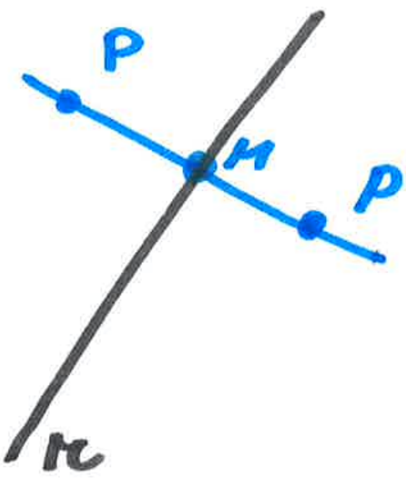
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

in entrambi i casi ci sono punti reali.

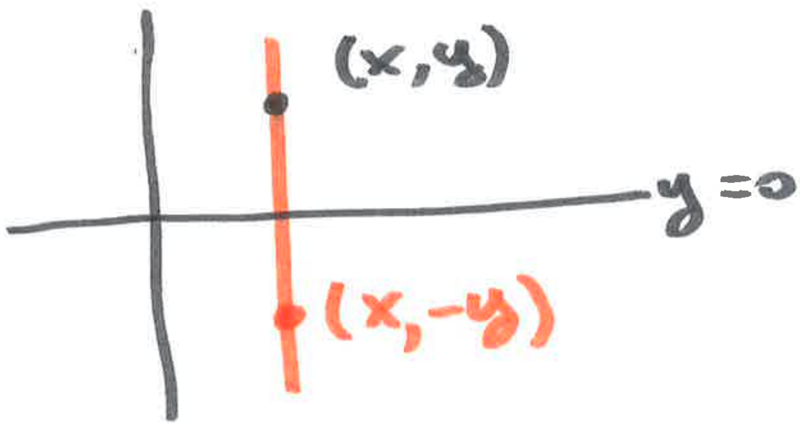
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

assi: $x=0$, $y=0$

in particolare chiamo riflessione rispetto una retta r del piano la funzione $AG(2,\mathbb{R}) \to AG(2,\mathbb{R})$.
che associa ad un punto P il punto P' tale che la retta r sia l'asse fra P e P'.

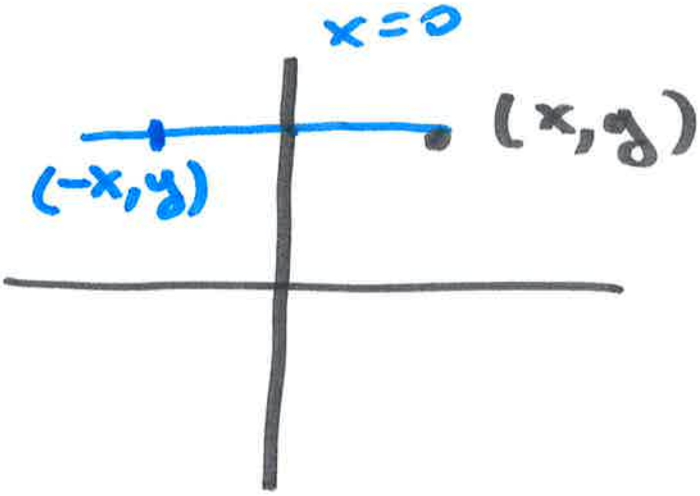


riflessione del punto di coord. (x,y) rispetto $y=0$



$(x,y) \to (x,-y)$

riflessione rispetto $x=0$



$(x,y) \to (-x,y)$.

consideriamo $\mathcal{E} = V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$

osserviamo che se applichiamo una delle 2 trasf. di cui sopra (o tutte e 2) otteniamo ancora $\mathcal{E}$.

$\to$ l'ellisse è simmetrica rispetto gli assi.

parabole

Abbiamo solo un asse e il centro è ad ∞

scegliamo
un riferimento in cui l'origine è il vertice e la base è data dalle direzioni dell'asse e da quella della tg nel vertice all'asse stesso.

In particolare possiamo scegliere ~~[illegible]~~ il riferimento di modo che la retta $x=0$ sia l'asse e quindi la parabola passa per il punto improprio $[(0\ 1\ 0)]$ e il punto proprio $[(0\ 0\ 1)]$

$$a_{11}x_1^2 + 2\cancel{a_{12}x_1}x_2 + 2\cancel{a_{13}}x_1x_3 + \cancel{a_{22}x_2^2}$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + \cancel{a_{33}}x_3^2 = 0$$

tg. all'infinito $(0\ 1\ 0)$

$$a_{22} = 0 \quad + \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_{12} = 0$$

passaggio per $(0\ 0\ 1)$

$$a_{33} = 0$$

tg. in $(0\ 0\ 1)$ di eq. $y = 0$

$$(0\ 0\ 1)\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_{13}x + a_{23}y = 0$$

$$a_{23} \neq 0 \qquad a_{13} = 0$$

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$$

ovvero in coord. affini

$$a_{11} x^2 + 2y = 0$$

cioè eq. della forma

$$y = \alpha x^2$$