Coniche

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$${}^tXAX = 0$$

Introdurre un prodotto scalare associato ad A.

$$\beta_A(X, y) = {}^tXAy.$$

<u>Def</u>: Diciamo che due punti P e Q sono <u>coniugati</u> rispetto a $\mathcal{C}$ se posto X' coord. di P y' coord. di Q

$$\beta_A(x', y') = 0 \quad \text{cioè} \quad {}^tX'Ay' = 0$$

In particolare P è autoconiugato se $\beta_A(X', X') = 0$ cioè

$$^tX' A X' = 0 \quad \text{ovvero} \quad P \in \mathcal{C}.$$

N.B.: Se A è una matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ anche αA con $\alpha \neq 0$ è una matrice associata a $\mathcal{C}$.

$\downarrow$

il prodotto scalare β_A non ha un significato geometrico in sé ma la condizione "$\perp_A$" ovvero "$\perp_{\mathcal{C}}$" è "geometrica".

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2x_1x_2 - x_3^2 = 0$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 4x_1x_2 - 2x_3^2 = 0$$

$$\beta_A((1\,0\,0),(0\,1\,0)) = (1\,0\,0)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\beta_{2A}((1\,0\,0),(0\,1\,0)) = 2$$

quello che é vero é che

$$\beta_A(x,y)=0 \iff \beta_{2A}(x,y)=0$$

In particolare la relazione $\perp$ indotta dai prodotti scalari non dipende da che eq. prendiamo per la conica ma solo dalla conica $\mathcal{C}$.

In particolare $\boxed{P \perp_{\mathcal{C}} P \iff P \in \mathcal{C}}$

$\mathcal{C}$ conica generale → priva di punti doppi → $\det(A) \neq 0$

Def: Si dice polare di un punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ il luogo dei punti coniugati con P cioè $P^{\perp e}$.
Data una retta r di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si dice polo di r il punto $r^{\perp e}$.

OSS: Se $P = [(x_1' \, x_2' \, x_3')] \Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{\perp e} = \left\{ [(x_1'' \, x_2'' \, x_3'')] \;\middle|\; (x_1' \, x_2' \, x_3') A \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

e dunque $P^{\perp e}$ corrisponde ai punti le cui coord. omogenee sono contenute in uno spazio vett. di dim $= 3 - 1 = 2 \rightarrow$ retta.

$r^{\perp e}$ saranno i punti contenuti in uno sp. vett. di dim $= 1 \Rightarrow$ 1 punto.

1) Quali sono le polari dei punti di $\mathcal{C}$?

$$P \in \mathcal{C} \Rightarrow P \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$$

→ CALCOLIAMO IL LUOGO DELLE RT. TANGENTI PER UN PUNTO A $\mathcal{C}$ E VEDIAMO L'EQ. DELLA TG. PER $P \in \mathcal{C}$.

Siano $P = [(x_1' \; x_2' \; x_3')] = [X']$

$Q = [(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')] = [X'']$

due punti.

Un punto $[X]$ della retta per P e Q ha coord. $[\lambda X' + \mu X'']$ con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

voglio: ${}^t X A X = 0$

$${}^t(\lambda X' + \mu X'') A (\lambda X' + \mu X'') = 0$$

$$\lambda^2\, {}^t X' A X' + 2\lambda\mu\, {}^t X' A X'' + \mu^2\, {}^t X'' A X'' = 0 \quad (*)$$

vogliamo ora una retta tg. per P

→ che le 2 soluzioni di (*) devono coincidere ⇒ $\frac{\Delta}{4} = 0$

(1) $$\boxed{({}^t X' A X'')^2 - ({}^t X' A X')({}^t X'' A X'') = 0}$$

OSS 1: Se al posto di X'' mettiamo X, l'eq. (1) ci dà esattamente il luogo delle tg. per P a $\mathcal{C}$.

↓

risulta una conica riducibile per P.

OSS 2: Supponiamo $P \in \mathcal{C} \Rightarrow {}^t X' A X' = 0$

⇒ l'equazione delle tg diventa

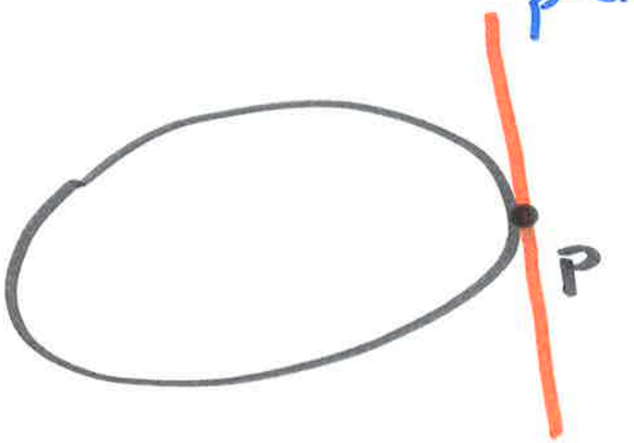
$${}^t X' A X = 0$$

l'eq. della tg in $P \in \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$

é quella della polare di P.

$P^{\perp e}$ se $P \in \mathcal{C}$ é la tg.

alla conica per quel punto.



$$(x_1' \; x_2' \; x_3') A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

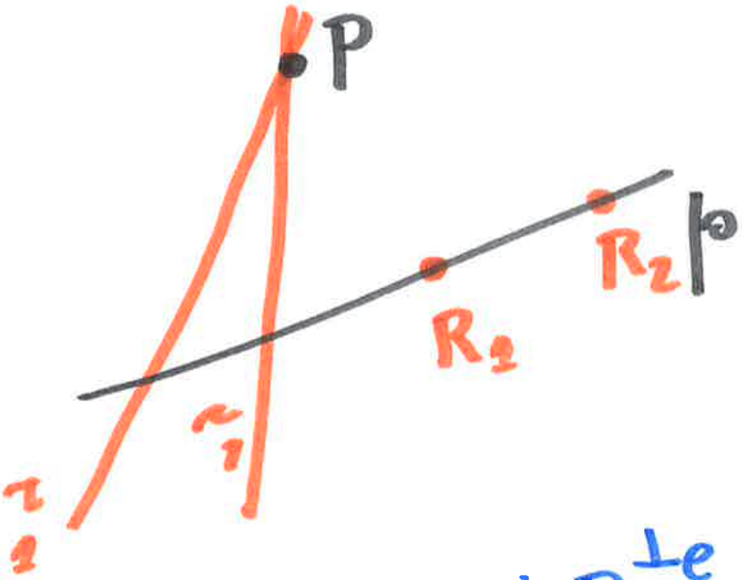
$$\boxed{\nabla F(P) \cdot (x_1 x_2 x_3) = 0}$$

ove $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \; \frac{\partial F}{\partial x_2} \; \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$

polari dei punti di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ non su $\mathcal{C}$.

Teorema: (principio di reciprocità).

Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ e sia p la sua polare.
Allora i poli delle rette per P appartengono alla polare p.
Le polari dei punti di p passano per il polo P.



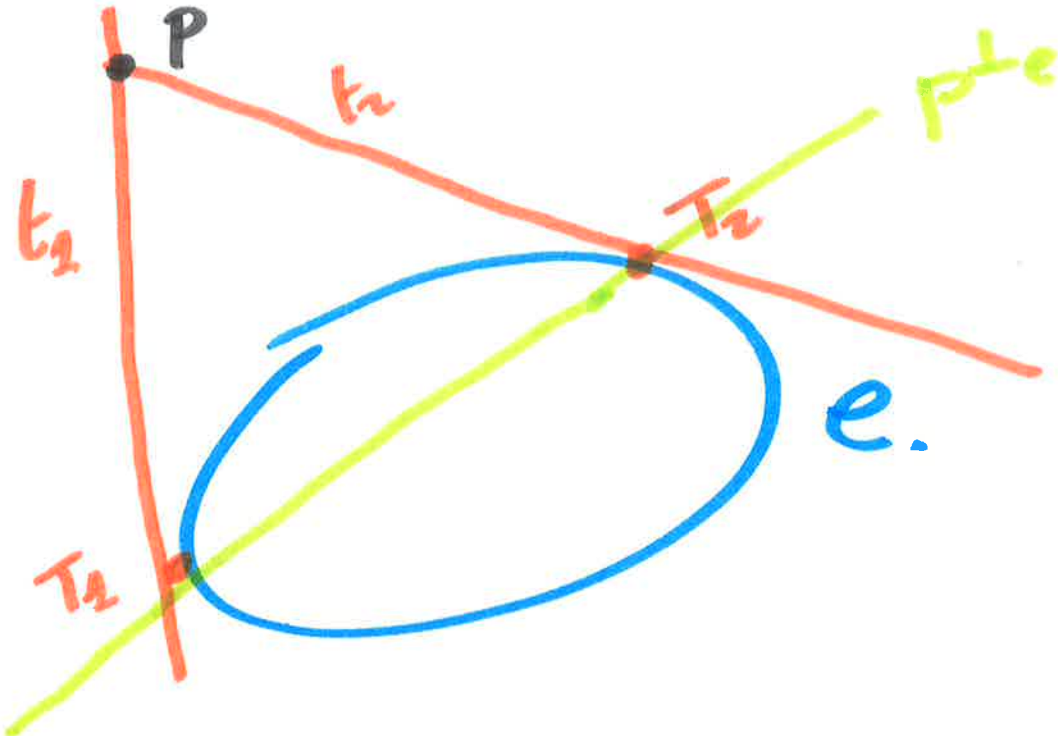
DIM: Sia $R \in p = P^{\perp_{\mathcal{C}}} \Rightarrow P^{\perp_{\mathcal{C}}\perp_{\mathcal{C}}} \subseteq R^{\perp_{\mathcal{C}}}$

ma $P^{\perp_{\mathcal{C}}\perp_{\mathcal{C}}} = P \Rightarrow P \in R^{\perp_{\mathcal{C}}}$

Viceversa sia r una retta con $P \in r$

$\Rightarrow r^{\perp_{\mathcal{C}}} \subseteq P^{\perp_{\mathcal{C}}} = p$

$\square$



$P \notin e \rightarrow$ sappiamo che $\exists$ 2 rette tg. a e passanti per P, chiamiamole t_1 e t_2 e siano T_1, T_2 i rispettivi punti di tg.

la polare di P é la retta che congiunge T_1 e T_2.

$P = t_1 \cap t_2 = T_1^{\perp_e} \cap T_2^{\perp_e}$ ma allora $p^{\perp_e}$ deve contenere T_1 e T_2; é una retta e $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ é proprio la retta T_1T_2 $\square$

OSS/DEF.

Se $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ ci sono 3 possibilità:

1) per P passano 2 rette tg a $\mathcal{C}$ reali e distinte

$\rightarrow$ P é esterno alla conica $\mathcal{C}$

2) per P passano "2 rette tg a $\mathcal{C}$ reali e coincidenti"

$\rightarrow$ P appartiene alla conica $\mathcal{C}$.

3) per P passano 2 rette tg a $\mathcal{C}$ immaginarie e coniugate (il cui unico pto reale é P) $\Rightarrow$ P é interno alla conica

per quanto riguarda la classificazione proiettiva delle coniche, a meno di trasf. sono tutte eq. fra loro a parità di rango.

CONICA $\Leftrightarrow$ matrice reale e simmetrica. in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

proiettività di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è una trasf. che manda sottospazi di $\mathbb{C}^3$ in sottospazi di $\mathbb{C}^3$ della stessa dimensione e conserva l'inclusione.

$\downarrow$

le proiettività formano un gruppo (semilineare generale) e sono date dall'azione di una matrice invertibile 3x3 sui punti più eventualmente il coniugio complesso.

Studio in $AG(2,\mathbb{R})$ o $EG(2,\mathbb{R})$

↓

ragioniamo comunque in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

ma distinguendo fra punti propri/impropri reali/immaginari.

CLASSIFICARE LE CONICHE DI $AG(2,\mathbb{R})$

→ studiare i punti di queste coniche che non sono in $AG(2,\mathbb{R})$ → punti impropri complessi o no.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale consideriamo le intersezioni di $\mathcal{C}$ con la retta impropria $x_3=0$.

1) Sono 2 punti reali e distinti → $\mathcal{C}$ è una iperbole

2) Sono 2 punti reali e coincidenti → $\mathcal{C}$ è una parabola.

3) sono 2 punti imm. e coniugati
$\rightarrow \mathcal{C}$ é una ellisse.

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -|A^*|.$$

$\det(A^*) > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} < 0 \Rightarrow$ ELLISSE

$\det(A^*) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow$ PARABOLA

$\det(A^*) < 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} > 0 \Rightarrow$ IPERBOLE.

Quello che conta veramente é la segnatura del prod. scalare indotto sulla retta $x_3 = 0$.

• Segnatura $(+,+)$ o $(-,-)$ il prod. è definito positivo $\Rightarrow$ non ci sono punti isotropi (= ort. a se stessi) $\Rightarrow$ ELLISSE.

• Segnatura $(+,-)$ $\rightarrow$ ci sono 2 punti isotropi.

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

• Segnatura $(+,0)$ o $(-,0)$ $\Rightarrow$ c'è un unico punto isotropo

$$x_1^2 = 0$$

Coniche in $AG(2,\mathbb{R})$.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale

Si dice centro di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria $r_\infty : x_3 = 0$

Una conica è detta a centro se il suo centro è un punto proprio. (non appartiene a r_∞)

$\Rightarrow$ ELLISSI e IPERBOLI.

parabole → coniche <u>non a centro</u>

Si dice <u>diametro</u> di $\mathcal{C}$ ogni polare di un punto improprio → retta passante per il centro

Si dice <u>asintoto</u> di $\mathcal{C}$ ogni retta tangente propria a $\mathcal{C}$ in un punto improprio di $\mathcal{C}$.

↳ IPERBOLI → hanno 2 asintoti reali

↳ ELLISSI → hanno 2 asintoti imm. coniugati in quanto i loro pti impropri sono immaginari.

↳ parabole → non hanno asintoti (sono tg. la retta impropria e dunque non hanno tg. proprie nei punti impropri)

In ambito Euclideo → $\perp$ ortogonalità euclidea $\perp_{\mathcal{C}}$ polarità.

Si dice <u>asse</u> di una conica un diametro ortogonale al proprio polo.

<u>vertice</u>: l'intersezione di un asse con la conica.

<u>Fuoco</u>: ogni intersezione propria delle tg. alla conica condotte per i punti ciclici del piano $J_\infty = [(1,i,0)]$
$\bar{J}_\infty = [(1,-i,0)]$

$\mathcal{C}$ é detta <u>circonferenza</u> (generalizzata) se $J_\infty, \bar{J}_\infty \in \mathcal{C}$.

<u>OSS</u>: In generale una conica ha

- se é a centro e non é una circonferenza: 2 assi (mutualmente ortogonali), 2 fuochi reali, 2 fuochi immaginari e coniugati.
- se é una circonferenza: 1 fuoco che coincide col centro; ogni diametro é un asse.
- se é una parabola: 1 fuoco reale; 1 asse.

Sia $\mathcal{C}$ una conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}.$$

equazione dei diametri

polari

$\downarrow$

diametri = polari punti impropri

$$[(l, m, 0)] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(l a_{11} + m a_{12} \quad l a_{12} + m a_{22} \quad \cancel{l a_{12} +} \quad l a_{13} + m a_{23} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

centro: intersechiamo le rette per $(l, m) = (1, 0)$ e $(l, m) = (0, 1)$

passando a coord. affini:

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+m(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0$$

<u>oss</u>: se $\mathcal{C}$ é una parabola $\Rightarrow$

abbiamo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ ~~g~~ i diametri sono tutti paralleli e formano un fascio improprio di eq.

$a_{11}x+a_{12}y+k=0 \quad k\in\mathbb{R}.$

ALTRIMENTI FASCIO PROPRIO per il centro.

$\rightarrow$ per avere gli assi ci servono diametri $\perp$ al proprio polo.

$$(la_{11}+ma_{12})x+(la_{12}+ma_{22})y$$
$$+la_{13}+ma_{23}=0$$

↓

~~ASSE ...~~

DIAMETRO = POLARE DEL PUNTO $[(l,m,0)]$

la condizione di $\perp$ col polo è dunque

$$\cancel{(l\ m)}\ \left|\begin{matrix} \dfrac{la_{11}+ma_{12}}{l} & \dfrac{la_{12}+ma_{22}}{m} \end{matrix}\right| = 0$$

perché $(la_{11}+ma_{12},\ la_{12}+ma_{22})$ è la dir. ortogonale all'~~asse~~ diametro.

$$m(\ell a_{11}+m a_{12})-\ell(\ell a_{12}+m a_{22})=0$$

$$m\ell(a_{11}-a_{22})+(m^2-\ell^2)a_{12}=0$$

OSS: se $a_{11}=a_{22}$ & $a_{12}=0$

$\Rightarrow$ questa eq è identicamente soddisfatta.

$\Updownarrow$

è circonferenza

ALTRIMENTI eq. di II grado in m, ℓ.

$$m^2 a_{12}+m\ell(a_{11}-a_{22})-\ell^2 a_{12}=0$$

$$\Delta = m\cdot(a_{11}-a_{22})^2+a_{12}^2 \geq 0$$

DI PIÙ SI VEDE CHE IL PROD. DEI COEFF. ANGOLARI DEGLI ASSI È -1 $\Rightarrow$ SONO ORTOGONALI.