Punti reali e punti immaginari:

$\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$

$$P \longrightarrow \overline{P}$$

$$[(x_1 \dots x_{n+1})] \longrightarrow [(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})]$$

Se $P = \overline{P} \Rightarrow P$ rappresenta/corrisponde ad un punto di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Curva algebrica reale.

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{V}(F) = \overline{\hat{V}(F)}$$

Una curva algebrica di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ / una superficie algebrica di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ sono <u>reali</u> se il loro insieme dei punti coincide con l'insieme dei coniugati degli stessi.

(idem nel caso affine).

In generale $\boxed{\overline{V(f)} = V(\bar{f})}$

Infatti
$$\overline{V(f)} = \{ \overline{(x,y)} \mid f(x,y)=0 \} =$$
$$= \{ (\bar{x},\bar{y}) \mid f(x,y)=0 \} =$$
$$= \{ (\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) \mid f(\bar{x},\bar{y})=0 \} =$$
$$= \{ (x,y) \mid f(\bar{x},\bar{y})=0 \} =$$
$$= \{ (x,y) \mid \overline{f(\bar{x},\bar{y})}=0 \} =$$
$$= \{ (x,y) \mid \bar{f}(x,y)=0 \}.$$
$\square$

CONSEGUENZA (da ricordare!).

$V(f)$ è reale $\iff$ $V(f)=V(g)$ con g polinomio a coeff. reali.

DIM: come per i punti.

Se $V(f) = \overline{V(f)} \Rightarrow V(f) = V(\bar{f})$

$\Rightarrow$ se $\bar{f} \neq -f \Rightarrow V(f) = V(f + \bar{f})$

se $\bar{f} = -f \Rightarrow V(f) = V(if)$.

Teorema: 1) In $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ogni retta ha almeno un punto reale.

2) Se una retta ha 2 punti reali $\Rightarrow$ essa é reale.

3) Per ogni punto immaginario $\exists!$ retta reale che lo contiene.

Teorema II: 1) In $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ ogni piano contiene almeno una retta reale.

2) Un piano che contiene 2 rette reali distinte é reale.

3) Una retta di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ può essere

A) reale (se ha almeno 2 punti reali)

B) immaginaria di I specie se ha esattamente un punto reale ed é complanare con la propria coniugata.

c) immaginaria di II specie se non ha punti reali (ed è sghemba con la propria coniugata)

OSS: Sia X un punto reale di $V(f) \Rightarrow X \in V(f) \cap \overline{V(f)} = V(f) \cap V(\bar{f})$.

N.B Non è un se e solo se!

Ad esempio una retta r reale, per cui $r = \bar{r}$ contiene punti che non sono reali.

In generale quello che è vero è che $V(f) \cap V(\bar{f})$ è un luogo algebrico reale nel senso che posto $Y = V(f) \cap V(\bar{f})$ anche $\bar{Y} = Y$

$\square$

DIM I

1) Sia $r = V(f)$ una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Se $r = \bar{r} \Rightarrow r$ é reale $\Rightarrow$ FINE
(∞ punti reali)

Se $r \neq \bar{r} \Rightarrow r \cap \bar{r} = \{P\}$ perché 2 rette si intersecano sempre

$\Rightarrow r \cap \bar{r} = \{P\} = \bar{r} \cap r = \{\bar{P}\}$.

$\Rightarrow$ P é reale ▪.

2) Se r ha 2 punti reali ≠ possiamo osservare che $\bar{r}$ passa per i medesimi punti $\Rightarrow r = \bar{r}$ é reale.

3) Se P punto immaginario $\Rightarrow P \neq \bar{P}$.
Se r retta reale per P $\Rightarrow$
$\bar{P} \in r \Rightarrow r = P\bar{P}$ é l'unica possibilità. Inoltre $\bar{r} = \bar{P}P = r$ e quindi r reale.

□

DIM II.

1) Sia π piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$

se $\pi = \overline{\pi}$ abbiamo che π è reale e contiene ∞ rette reali.

Se $\pi \neq \overline{\pi}$ $\Rightarrow$ $r = \pi \cap \overline{\pi}$ e $\overline{r} = \overline{\pi} \cap \pi = r$

quindi $\pi \cap \overline{\pi}$ è una retta reale.

<u>N.B.</u> In $\pi \cap \overline{\pi}$ ci sono anche <u>punti</u> non reali.

2) Se π contiene 2 rette reali e distinte $\Rightarrow$ π contiene 3 punti reali non allineati $\Rightarrow$ $\pi = \langle P, Q, R \rangle =$

$$\overline{\pi} = \langle \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R} \rangle = \pi.$$

quindi π reale.

3) <u>OSS</u> che in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ due rette coniugate possono non essere complanari.

In tale caso $r \cap \overline{r} = \emptyset$.

$$r \begin{cases} x + iy = 1 + i \\ z = i \end{cases} \qquad \overline{r} \begin{cases} x - iy = 1 - i \\ z = -i \end{cases}$$

$$r \cap \overline{r} = \emptyset$$

$\square$

COME RICONOSCERE IL TIPO DI RETTE.

→ METTERE A SISTEMA LE EQ DI r CON LE EQ. CONIUGATE (DI $\bar{r}$).

→ Se $rk(A) = rk(A|B) = 2 \Rightarrow r = \bar{r}$ REALE

$rk(A) = rk(A|B) = 3 \Rightarrow r \cap \bar{r} = P$ r imm. di I specie.

$3 = rk(A) \neq rk(A|B) = 4 \Rightarrow r \cap \bar{r} = \phi$ r. imm. di II specie.

<u>N.B</u> La geometria euclidea é una geometria <u>reale</u>.

In ambito ampliato la norma eucl. non é una distanza.

<u>Def</u>: Una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ é detta <u>isotropa</u> se essa é ortogonale a se stessa rispetto il prod. scalare std. di

Teorema: Siano P, Q due punti su di una retta isotropa $\Rightarrow d_E(P,Q)=0$

Viceversa: il luogo dei punti a distanza 0 da un punto P è l'unione delle 2 rette isotrope per P.

(ogni retta isotropa ha un unico punto reale!).

DIM: 1) le rette del tipo $x=a$ non sono isotrope in quanto hanno dir. $\mathcal{L}((0\,1))$ e $(0\;1)\cdot(0\;1)=1\neq 0$.

Sia $r: y=mx+b$ una retta isotropa $\Rightarrow$ la dir. di r è data da $\mathcal{L}((1,m))$

vogliamo $(1,m)\cdot(1,m)=0$

$$1+m^2=0$$

$$m=\pm i$$

Una retta r è isotropa $\iff$ è una retta propria e passa per uno dei due <u>punti ciclici</u> del piano

$$J_\infty = [(1,i,0)] \qquad \bar{J}_\infty = [(1,-i,0)]$$

Scoperta (se P reale le 2 rette isotrope per P corrispondono proprio al luogo dei punti della "circonferenza di raggio 0 per P").

$$P = (x_P, y_P)$$

$$\{(x,y) \mid (x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \mid (ix - ix_P + y - y_P) \cdot (-ix + ix_P + y - y_P) = 0\}.$$

$$\boxed{(a^2+b^2) = (b+ia)(b-ia)}$$

Siano P e Q due punti di una retta isotropa.

$$\Rightarrow \quad P = (x_P, \pm i x_P + b)$$

$$Q = (x_Q, \pm i x_Q + b)$$

$$d(P,Q)^2 = (x_P - x_Q)^2 + (\pm i)^2 \left(x_P + \frac{b}{i} - x_Q - \frac{b}{i}\right)^2$$

$$= (x_P - x_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2 = 0$$

$\square$

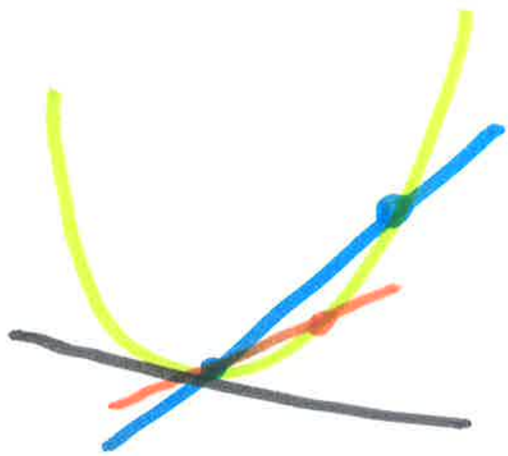
Curve algebriche e punti multipli.

<u>Teorema</u>: In $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ sia F un polinomio omogeneo di grado n.

$\Rightarrow \forall$ retta r si ha

$r \subseteq \tilde{V}(F)$ oppure

$|r \cap \tilde{V}(F)| = n$ contati con la debita molteplicità.



In generale noi contiamo il numero di intersezioni in P come numero delle soluzioni (ripetute) che ci danno ~~[illegible]~~ P come intersezione.

<u>Def</u>: Un punto $P \in \tilde{V}(F)$ è detto <u>k-uplo</u> $(k \geq 1)$ se ogni retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno k volte (ed esistono k rette che intersecano $\tilde{V}(F)$ in P $k+1$ volte (con le debite molteplicità).

$k=1 \Rightarrow$ punto semplice
$k=2 \Rightarrow$ punto doppio

Teorema: $P \in \tilde{V}(F)$ di coordinate

$[(x_1' \; x_2' \; x_3')]$ è

multiplo (k-uplo $k>1$)

se
$$\begin{cases} F(x_1' \; x_2' \; x_3') = 0 \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P = 0 \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P = 0 \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P = 0 \end{cases}$$

È un teorema di analisi? **No** (non esattamente).

DIM: Scrivere eq. generica retta per P.
→ imporre che le coord. di P siano
soluzione multipla. □

Teorema: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva di ordine n.
Allora $\tilde{V}(F)$ non ha punti $(n+1)$-upli.
Se $\tilde{V}(F)$ ha un punto n-uplo $\Rightarrow$ essa è unione di n rette per tale punto (non necessariamente distinte)

DIM: Se una curva di ordine n avesse un punto $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ $\forall$ retta per esso sarebbe contenuta nella curva (per il teorema dell'ordine) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{V}(F) = \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ 〽 $F \equiv 0$

$\boxed{n=2}$ Sia $\deg F = 2$ e sia $P \in \tilde{V}(F)$ un punto doppio.
poiché $\tilde{V}(F)$ è una curva $\exists\, Q \neq P,\ Q \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ con $Q \in \tilde{V}(F)$.

⇒ la retta $r_0 = PQ$ deve essere contenuta in $\tilde{V}(F)$ perché interseca $\geq 2+1=3$ volte

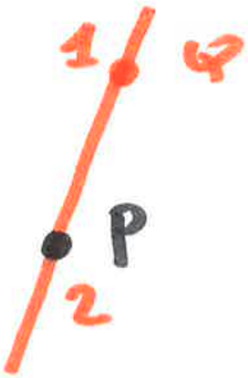
⇒ l'equazione $G(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ di r deve dividere $F(x_1, x_2 x_3) = 0$

$$\Rightarrow F(x_1\ x_2\ x_3) = G(x_1\ x_2\ x_3) \cdot H(x_1\ x_2\ x_3)$$

con $\deg G = \deg H = 1$

$$\Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H) = \tilde{V}(G \cdot H).$$

è unione di 2 rette.



□

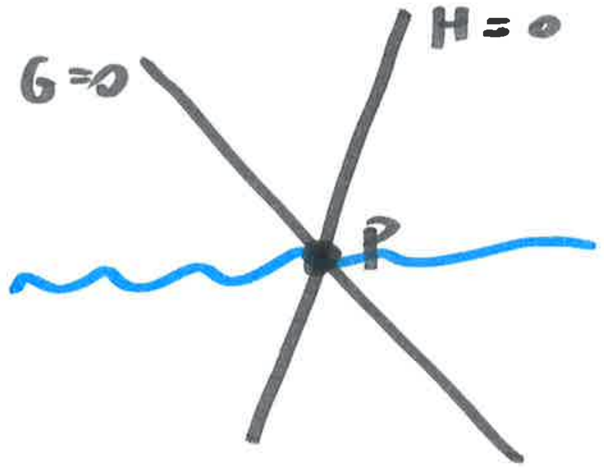
n generico. → punto P n-uplo.

$Q \neq P$ → retta PQ contenuto → dividete per eq. di PQ e ragionare per $(n-1)$.

Viceversa ($n=2$).

Supponiamo che $\tilde{V}(F)=\tilde{V}(H)\cup\tilde{V}(G)$

con $\deg F=2$, $\deg H=\deg G=1$



Allora il punto $P=\tilde{V}(H)\cap\tilde{V}(G)$ é doppio.

DIM: Sia r_0 una retta per P.

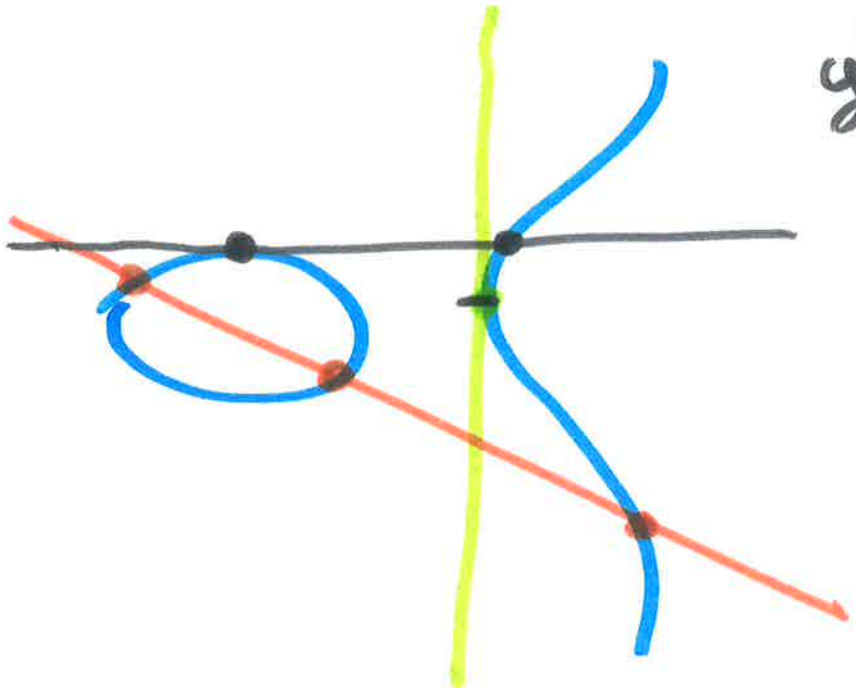
Se $r_0\cap\tilde{V}(F)\ni Q$ con $Q\neq P$

$\Rightarrow Q\in\tilde{V}(G)$ oppure $Q\in\tilde{V}(H)$

$\Rightarrow r_0=\tilde{V}(G)$ oppure $r=\tilde{V}(H)$.

Quindi la generica retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ solo in $P\Rightarrow P$ é doppio $\square$

$y^2 = x^3 + ax + b$



CONICHE

Def: Si dice conica una curva algebrica (reale) piana del II ordine.

- curva algebrica. $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$
  con $F(x_1\, x_2\, x_3)$ polinomio omogeneo.
- reale $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \rightarrow F(x_1\, x_2\, x_3)$ é a coeff. in $\mathbb{R}$.
- piana: stiamo lavorando in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

(in particolare le indeterminate in F sono 3).

• II ordine: $\deg F = 2$.

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

Generico polinomio omogeneo di II grado in x_1, x_2, x_3

NON TUTTI $a_{ij} = 0$ e polinomi proporzionali danno la medesima conica. → le possibili coniche sono ∞^5

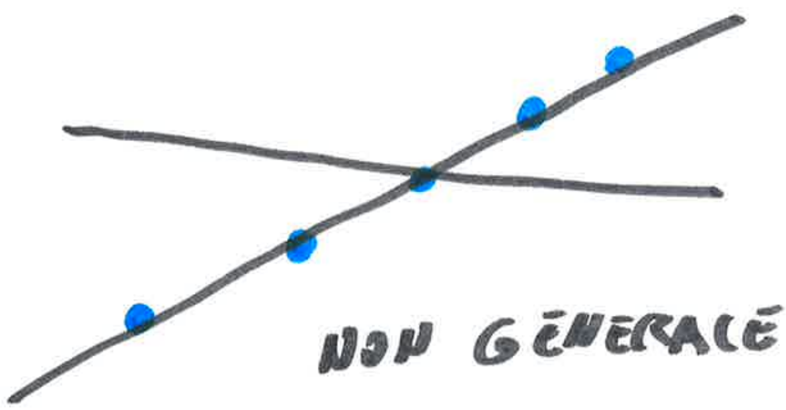
→ per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica.

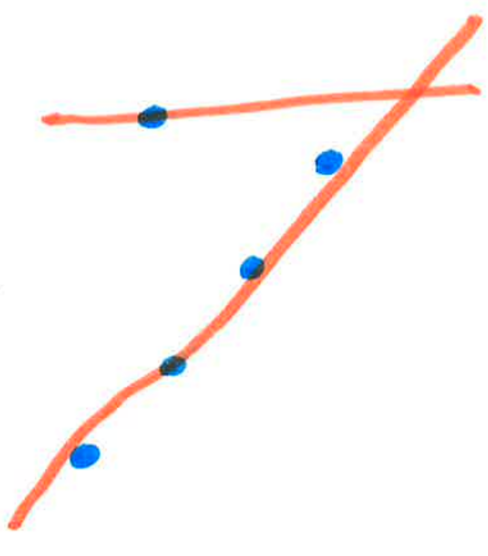
6 coeff. a_{ij} a meno di proporzionalità.

↓

soluzioni di un sistema lineare in a_{ij} che deve avere ∞^1 soluzioni → sistema di $rk = 5$ omogeneo.

Def: Diciamo che 5 punti sono in posizione generale (per le coniche) se le condizioni di passaggio per essi danno un sistema di $rk=5$.





posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

l'equazione della conica diventa

$$ {}^tX A X = 0 $$

I punti della conica sono i punti autoconiugati per l'ortogonalità $\perp_A$ indotta dalla matrice A.

$$\mathcal{C} = \text{conica} = \tilde{V}(F)$$

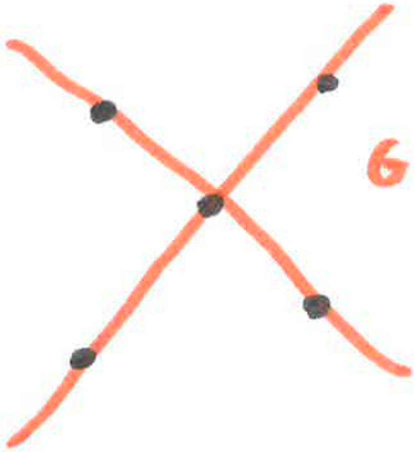
$\downarrow$

A matrice reale e simmetrica

$\downarrow$

"prodotto scalare $*_A$" indotto sulla geometria con $\perp_A$ ortogonalità corrispondente.

$$\mathcal{C} = \tilde{V}(F) = \tilde{V}({}^tXAX) = \{P : P \perp_A P\}.$$



GENERALE

La condizione di essere in pos. generale ~~corrisponde a dire~~ implica che i punti ~~[illegible]~~ ~~non~~ non possono essere 4 su di una retta.

char $K \neq 2$

Ad ogni conica è possibile associare una matrice A simmetrica (e dunque un prodotto scalare).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

N.B: Se $*_A$ è definito positivo

$\Rightarrow$ la conica $\mathcal{C}$ non ha punti reali!

(perché l'unico vettore in $\mathbb{R}^3$ "ortogonale a sè stesso è $\underline{0}$).

La matrice A contiene tante informazioni sulla conica.

1) P è punto doppio per la conica $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$

$P = {}^T[(x_1' \; x_2' \; x_3')]$ abbiamo

$$AP = \underline{0}$$

DIM:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 \end{cases}$$

e dunque se vale (*)

* allora $AP = \underline{0}$

e in particolare ${}^tPAP = \underline{0}$

e dunque $P \in \mathcal{C}$. □

CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE.

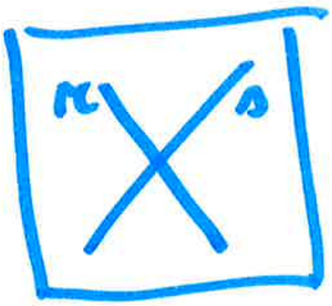
Se $rk(A) = 3 \Rightarrow \mathcal{C}$ è priva di punti doppi.

$rk(A) = 2 \Rightarrow AX = \underline{0}$ ha ∞^2 soluzioni tutte prop. $\Rightarrow \mathcal{C}$ ha uno ed un solo punto doppio.

$rk(A) = 1 \Rightarrow AX = \underline{0}$ ha ∞^2 sol. $\rightarrow \mathcal{C}$ è una retta contata 2 volte ed ha ∞^2 pt. doppi.

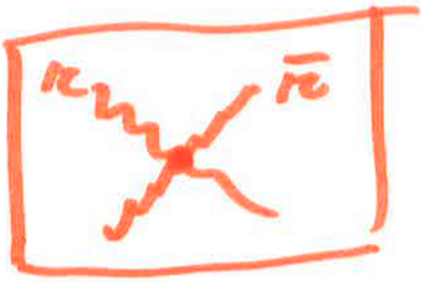
N.B: dato $F(x_1, x_2, x_3)$ omogeneo di II grado noi abbiamo dai teoremi dimostrati che F si fattorizza ($\Leftrightarrow$ la curva è riducibile) $\Leftrightarrow$ $\det(A)=0$ ($\exists$ punti doppi).

→ se $\det(A)=0$ → coniche riducibili in unione di 2 rette.



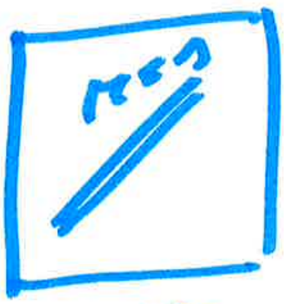
2 rette reali e distinte

$rk(A)=2$



2 rette imm. e coniugate

$rk(A)=2$



2 rette reali e coincid.

$rk(A)=1$

Esempio:

$$X_1^2 + X_2^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pto doppio $\rightarrow [(0\ 0\ 1)]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$
origine.

$$(X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2) = 0$$

o su coordinate affini

$$(x+iy)(x-iy) = 0$$

$\square$