Ampliamento proiettivo.

$$AG(n, \mathbb{K})$$

geometria affine + punti impropri
(direzioni delle rette).

<u>NOTAZIONI.</u>

$$PG(\underline{n}, \mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n\mathbb{K}$$

$$= \tilde{A}_{\underline{n}}$$

n = dimensione

$n+1$ = dimensione dello spazio vettoriale
su cui si lavora.

$n=2$, $n=3$
piano spazio

In $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ i punti sono rappresentati
da coordinate omogenee, i.e. classi
di proporzionalità di vettori non nulli di
lunghezza $n+1$.

$$\mathbb{P}^n \mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}.$$

CORRISPONDENZA FRA.

SOTTOSPAZI AFFINI DI DIMENSIONE $k \leq n$ in $AG(n, \mathbb{K})$ $\longmapsto$ SOTTOSPAZI VETTORIALI W di dimensione $k+1 \leq n+1$ tali che $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

punto 0 $\longmapsto$ sott. 1 dim. W_1

retta 1 $\longmapsto$ sott. 2-dim W_2

piano 2 $\longmapsto$ sott 3-dim W_3 di $\mathbb{K}^{n+1}$

Ai punti di una retta in $AG(n, \mathbb{K})$ corrispondono i punti di $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ le cui coordinate omogenee sono contenute in un sott. di dim $=2$ di $\mathbb{K}^{n+1}$.

$f(x,y)=0$ eq. di una curva algebrica.

$F(x_1,x_2,x_3)=0$ eq. omogenea ottenuta da f.

$$x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right) =: F(x_1\, x_2\, x_3).$$

I punti di $V(f) \subseteq AG(2,\mathbb{K})$ sono anche punti di $\tilde{V}(F) \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$.

Ci sono anche punti impropri in $\tilde{V}(F)$

In particolare

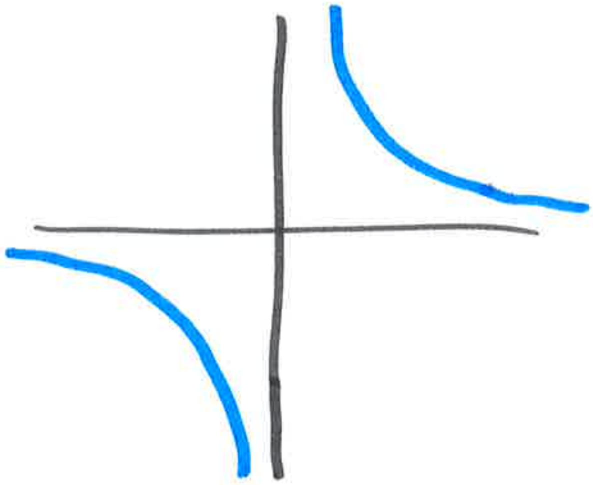
$\exists$ una biiezione fra i punti di $V(f)$ ed i punti propri di $\tilde{V}(F)$

(i.e. $\tilde{V}(F) \cap \{[(x_1, x_2 x_3)] \mid x_3 \neq 0\}$.

I punti di $\tilde{V}(F) \setminus V(f)$ cioè i punti

di $\tilde{V}(f) \cap \{[(x_1, x_2, x_3)] \mid x_3 = 0\}$.
sono detti punti impropri della curva.

In generale questa nozione corrisponde a quanto ci aspetteremmo da "punti all'infinito" per $V(f)$.



$xy = 1$

I suoi punti impropri corr. alle direzioni degli asintoti.

N.B: Noi non usiamo la nozione di limite.

→ OSS: in ambito ampliato diventa più facile studiare le curve algebriche ma ci sono ancora pb

Teorema: Sia $F(x_1 x_2 x_3)=0$ l'equazione omogenea di una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ e sia $r: ax_1+bx_2+cx_3=0$ una qualsiasi retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$.

Allora $|r \cap \tilde{V}(F)| \leq n$ ove n è il grado di F a meno che non sia $r \subseteq \tilde{V}(F)$.

DIM: Sia r la retta data e siano

$$P=[(x_1' \, x_2' \, x_3')] \quad Q=[(x_1'' \, x_2'' \, x_3'')]$$

due suoi punti distinti.

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'' \\ x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'' \\ x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'' \end{cases}$$

Sostituisco $x_1, x_2 \, x_3$ in

$$F(x_1 x_2 x_3)=0$$

$$g(\lambda,\mu) := F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'')$$

polinomio in (λ,μ) omogeneo di grado n oppure identicam. nullo.

Se $g(\lambda,\mu) \equiv 0 \Rightarrow r_0 \subseteq \mathcal{V}(F)$ fine.

altrimenti $\deg g(\lambda,\mu) = n$

voglio contare le intersezioni.

OSSERVIAMO CHE AD OGNI PUNTO CORRISPONDE UNA CLASSE DI PROPORZIONALITÀ $[(\lambda,\mu)]$.

Infatti se $(\lambda',\mu') = \alpha(\lambda,\mu)$ $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda x_1' + \mu x_1'' \\ \lambda x_2' + \mu x_2'' \\ \lambda x_3' + \mu x_3'' \end{matrix} \quad e \quad \begin{matrix} \lambda' x_1' + \mu' x_1'' \\ \lambda' x_2' + \mu' x_2'' \\ \lambda' x_3' + \mu' x_3'' \end{matrix}$$

rappresentano lo stesso punto

perché sono proporzionali.

$$g(\lambda,\mu) = a_0\lambda^n\mu^0 + a_1\lambda^{n-1}\mu^1 + \dots + a_n\lambda^0\mu^n \quad (*)$$

con $(a_0 \dots a_n) \neq \underline{0}$

Supponiamo $a_0 \neq 0 \Rightarrow$
osserviamo che $[(1,0)]$ non può essere soluzione dell'eq.

$g(\lambda,\mu) = 0$ perché $g(1,0) = a_0$

quindi per ogni soluzione $\mu \neq 0$

$\Rightarrow$ possiamo dividere l'eq.
$g(\lambda,\mu)$ per μ^n e posto $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$

otteniamo

$$\boxed{h(\xi) = a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_n = 0}$$

che è una equazione di grado n in ξ ed ha al più n soluzioni.

supponiamo ora

$$a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0 \quad a_{k+1} \neq 0$$

$$g(\lambda,\mu) = a_k \lambda^{n-k} \mu^k + \dots + a_n \lambda^0 \mu^n =$$
$$= \mu^k (a_k \lambda^{n-k} \mu^0 + \dots + a_n \lambda^0 \mu^{n-k}).$$

e vogliamo $g(\lambda,\mu) = 0$

<u>oss</u> 1) la coppia $[(1,0)]$ é soluzione di $g(\lambda,\mu)=0$ per k volte perché μ^k moltiplica tutto.

2) $[(1,0)]$ non é soluzione di $a_k \lambda^{n-k} \mu^0 + \dots + a_n \lambda^0 \mu^{n-k}$ (*')

ma dividendo tutto per μ^{n-k} e ponendo $\zeta = \frac{\lambda}{\mu}$.
l'equazione (*') ~~ha~~ diventa

$$a_k \zeta^{n-k} + \dots + a_n = 0$$

ed è una equazione di grado $n-k$ e quindi ha al più $n-k$ soluzioni.

$\Rightarrow$ Numero totale punti di intersezione $= k + \#$sol. equazione $(*')$

$$\leq k + (n-k) = n.$$

$\square$

In questa dimostrazione si fa vedere che se $r \not\subseteq \tilde{V}(F)$, $|\tilde{V}(F) \cap r|$ // numero di soluzioni di una eq. di grado n oppure $k+$ numero di soluzioni di una equazione di grado $n-k$.

Supponiamo che $\mathbb{K}$ sia un campo algebricamente chiuso

$\Rightarrow$ ogni eq. di grado t in $\mathbb{K}$ ha t soluz.

Se $\mathbb{K}$ é algebricamente chiuso il teorema appena dimostrato diventa:

Teorema dell'ordine: Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, $F(x_1\ x_2\ x_3)=0$ una equazione omogenea di grado $n \geq 1$ ed r una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$. Allora o $r \subseteq \tilde{V}(F)$ oppure $|r \cap \tilde{V}(F)| = n$.

n ha un significato geometrico e non dipende dalla retta a meno che non sia $r \subseteq \tilde{V}(F)$.

<u>oss</u>: Se $\mathbb{K}$ é algebricamente chiuso e' "facile" stabilire una corrispondenza fra insiemi di punti algebrici (i.e. che nascono da eq. polinomiali) e

loro equazioni. Se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso ci sono problemi.

Def: Sia $X \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$. Si dice che X è algebrico se $\exists\, F(x_1 x_2 x_3)$ polinomio omogeneo in $(x_1\, x_2\, x_3)$ tale che $X = \tilde{V}(F)$.

È possibile ricostruire F dato X algebrico?

Trovare tutti gli F tali che

$\tilde{V}(F) = X$ ...

Se $\mathbb{K}$ è alg. chiuso $\Rightarrow$ si può dimostrare che le F tali che $\tilde{V}(F) = X$ sono tutte della forma

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = \alpha\left(G(x_1\, x_2\, x_3) \right)^k \quad \alpha \neq 0,\ k \geq 1$$

per G un opportuno polinomio fissato.

$G: \quad 2x_1+3x_2+5x_3=0$

$$\tilde{V}(G^2)=\tilde{V}(G).$$

$$\tilde{V}(\alpha G)=\tilde{V}(G) \quad \alpha\neq 0$$

mettiamoci ora per $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

$G(x_1 x_2 x_3)=2x_1+3x_2+5x_3$

$H(x_1 x_2 x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$$\tilde{V}(G\cdot H)=\{[(x_1 x_2 x_3)] \mid (2x_1+3x_2+5x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0\}$$

$$=\tilde{V}(G).$$

$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ $=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$ che non è un punto

COMPLESSIFICAZIONE: lavorare con $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.

$AG(n, \mathbb{R})$

ogni n-upla in $\mathbb{R}^n$

è una n-upla in $\mathbb{C}^n$

perché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

→ immergiamo

$AG(n, \mathbb{R})$ in $AG(n, \mathbb{C})$

identificando i punti di

$AG(n, \mathbb{R})$ con i punti di

$AG(n, \mathbb{C})$ le cui coordinate

sono tutte reali.

↓

passando alla chiusura proiettiva

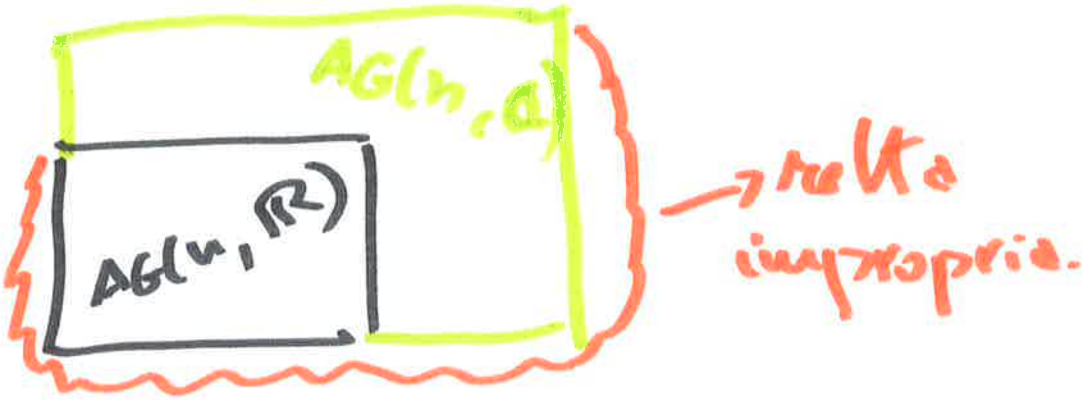
immergiamo

$\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

identificando tutti i punti che hanno

coordinate omogenee esprimibili come

vettori di $\mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.



A noi interessano i punti reali

vogliamo però potere lavorare sul campo complesso.

COME FARE A RICONOSCERLI?

OSS 1) Sia r una retta di $AG(2,\mathbb{R})$ e sia r' la corrispondente retta di $AG(2,\mathbb{C})$ ove abbiamo immerso $AG(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow AG(2,\mathbb{C})$ come detto prima.

$\Rightarrow$ $r \subseteq r'$ ma $r \neq r'$

infatti ad. es. se $r: x=0$; $r': x=0$

$(0,i) \in r' \setminus r$.

r come insieme contiene tutti e soli i punti reali di r'

cioè tutti e soli i punti $P=(x_P, y_P)$ di r' con $(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$

cioè tutti e soli i punti P di r' tali che $\boxed{P=\overline{P}}$ ove

$\overline{P} := (\overline{x}_P, \overline{y}_P)$.

<u>Def</u>: Un punto P di $AG(n, \mathbb{C})$ è detto <u>reale</u> $\Leftrightarrow$ $P=\overline{P}$.

Similmente un punto $P \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è detto <u>reale</u> $\Leftrightarrow$ $P=\overline{P}$

ove se $P=[(x_1 \dots x_{n+1})]$

allora $\overline{P}=[(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})]$.

<u>Teorema</u>: 1) Esiste una biiezione fra i punti di $AG(n, \mathbb{R})$ ed i punti reali di $AG(n, \mathbb{C})$ e 2) fra i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e i punti reali di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

DIM i) Facciamo vedere che se

$P = (x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{P} = P \Rightarrow$

P é un punto reale di $AG(2, \mathbb{C})$

Se $\overline{P} = (\overline{x}_P, \overline{y}_P) = P = (x_P, y_P) \Rightarrow$

$x_P, y_P \in \mathbb{R}$ e quindi P é un

punto di $AG(2, \mathbb{R})$.

1) Sia $P = [(x_1 \dots x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{P} = [(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})]_{\mathbb{C}} \ni (x_1 \dots x_{n+1})$

e dunque $\overline{P} = [(x_1 \dots x_{n+1})]$

e P ~~rappresenta~~ é reale.

Supponiamo ora

$P = \overline{P} \Rightarrow P = [(x_1 \dots x_{n+1})] =$

$= [(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})]$.

cioé $(x_1 \dots x_{n+1}) \in [(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})]$

ovvero $(x_1 \dots x_{n+1}) = \alpha (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1})$

$\alpha \neq 0$

(Ad esempio abbiamo

$$P = [(i \;\; 2i \;\; 0)] = [(-i \;\; -2i \;\; 0)])$$

vogliamo far vedere che

se $P = \overline{P} \Rightarrow \exists\, (y_1 \dots y_{n+1}) \in P$

con $(y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

$$P = \overline{P} \Rightarrow \quad (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1}) \in [(x_1 \dots x_{n+1})]$$

DISTINGUIAMO 2 CASI

1) $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n+1}) \neq -(x_1 \dots x_{nn})$.

$$\Rightarrow \underbrace{(x_1 + \overline{x}_1 \dots x_{n+1} + \overline{x}_{n+1})}_{\neq \underline{0}} \in [(x_1 \dots x_{n+1})]$$

ed è reale perché la somma di un numero complesso col suo coniugato è reale $\Rightarrow P$ è reale.

1) Se $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) = (x_1 \dots x_{n+1})(-1)$

$\Rightarrow (\bar{x}_1 \dots x_{n+1}) = i(y_1 \dots y_{n+1})$

con $(y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ e

$(y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{P}[(x_1 \dots x_{n+1})]$

$\Rightarrow$ P é reale nel senso che rappresenta un punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}\mathbb{R}$

ESEMPIO: in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

consideriamo il punto di coordinate omogenee

$P = [(1+i, 2+2i, 3+3i)]$

é reale? E reale $\Leftrightarrow \exists\, \bar{v} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}((1+i, 2+i, 3+i))$ con $\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

$P = \bar{P} \Leftrightarrow$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1+i & 2+2i & 3+3i \\ 1-i & 2-2i & 3-3i \end{pmatrix} = 1$$

$$(1+i)(2-2i) - (2+2i)(1-i)$$

$$= (2+2) - (2+2) = 0$$

con il II orlato viene pure $= 0$

$\Rightarrow P = \bar{P}$ e P è reale.

$$P = [(1+i)(1\ 2\ 3)] = [(1\ 2\ 3)].$$

$$\begin{array}{ccc} (1+i) & (2+2i) & (3+3i) \\ & + & \\ (1-i) & (2-2i) & (3-3i) \\ \hline (2 & 4 & 6) \sim (1\,2\,3) \end{array}$$