Def: In $AG(2,\mathbb{K})$ fissato un riferimento affine, si dice curva algebrica di ordine n l'insieme di tutti i punti di coordinate in

$$V(f) = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}.$$

ove $f(x,y)$ è un polinomio di grado n (NON COSTANTE) a coeff. in $\mathbb{K}$.

$$f(x,y) = ax + by + c.$$

$V(f)$ è una retta.

Legame fra algebra e geometria.

Teorema: Sia $V(f)$ una curva algebrica di ordine n e $r_0 : y = ax + b$ una retta. Allora $V(f) \cap r_0$ o contiene r_0 o consta di al più n punti.

DIM

I punti di $V(f) \cap r$ soddisfano

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ y=ax+b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ devono essere tali che

$$f(x, ax+b)=0$$

questa è un'equazione in x di grado al più n $\Rightarrow$ o è identicamente nulla o ha al massimo n soluzioni $\square$

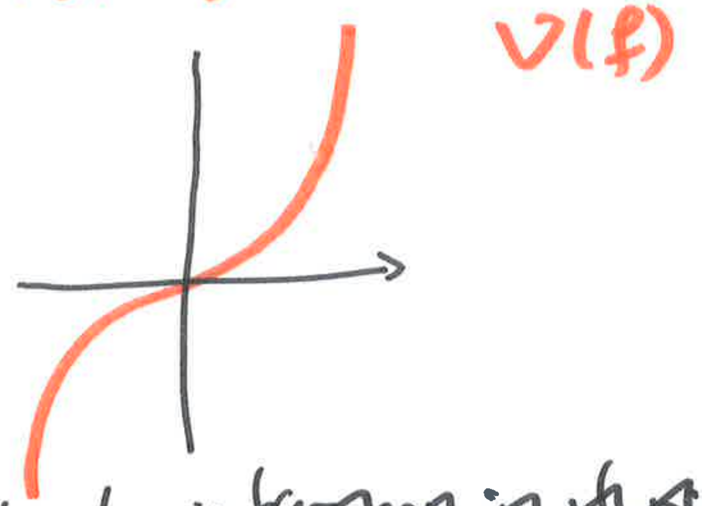
Pb

1) noi prendiamo rette del tipo $y=ax+b$. Cambia qualcosa se abbiamo rette verticali?

2) noi vorremmo descrivere il grado in termini geometrici ma le intersezioni sono $\leq n$ non $= n$!

potrebbero essere $< n$ $\forall$ retta.

Es. $f(x,y) = y - x^3$



~~ogni retta la interseca in [illegible] punti~~!

ogni retta orizz. interseca $V(f)$ in un punto come ogni retta verticale.

$$f(x,y) = (x^2+y^2+1)(x+2y+1).$$

$V(f)$ curva del III ordine ma ogni retta la interseca in un punto!

Def: Una curva algebrica $V(f)$ è detta riducibile se $\exists\, h(x,y)$, $g(x,y)$ polinomi non costanti:

tali che $f(x,y) = g(x,y) \cdot h(x,y)$.

Se una curva è riducibile $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V(f) = V(g) \cup V(h)$$

per la legge di annullamento del prodotto.

$V(g)$ e $V(h)$ sono dette componenti della curva.

Una curva non riducibile è detta irriducibile.

Vogliamo lavorare in un ambiente in cui sia "facile" studiare le proprietà generali delle curve algebriche.

AMPLIAMENTO (PROIETTIVO).

- $AG(2, \mathbb{K})$ $\qquad P = (x, y)$

$$P = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \quad \text{con } \frac{x_1}{x_3} = x \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

quali terne $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ sono tali che

$$\varphi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$
$$(x_1\ x_2\ x_3) \to \left(\frac{x_1}{x_3}\ \frac{x_2}{x_3}\right)$$

dia (x, y).

Devono essere tutte del tipo

$$\alpha(x\ y\ 1)$$

infatti se $\left(\frac{x_1}{x_3}\ \frac{x_2}{x_3}\right) = (x, y) \iff$

~~(x_1~~

$$x_1 = x_3 x$$
$$x_2 = x_3 y$$

e quindi $(x_1\ x_2\ x_3) = \underset{\alpha \neq 0}{\alpha}(x, y, 1)$

pongo $[x_1, x_2, x_3] := \mathcal{L}((x_1, x_2, x_3))$

e dico che $(x_1\ x_2\ x_3)$ sono coordinate omogenee del punto (x, y) ove $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L}((x, y, 1)) \setminus \{0\}$

AD OGNI PUNTO DI $AG(2, \mathbb{K})$ posso associare un sottospazio di $\mathbb{K}^3$

di dimensione 1 ed ogni vettore non nullo di tale sottospazio sono "coordinate omogenee" del punto P.

Vediamo cosa succede a passare in coordinate omogenee per una retta.

$$r: \quad ax + by + c = 0$$

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

$\downarrow$

moltiplico per x_3 e ottengo

$$(*) \quad \boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0}$$

Vogliamo capire a cosa corrispondono le soluzioni di (*).

$x_3 \neq 0 \rightarrow$ ogni soluzione di (*) ci dà le coord. omogenee di un punto di $AG(2,\mathbb{K})$

$x_3 = 0 \rightarrow$ DOBBIAMO RISOLVERE

$$a x_1 + b x_2 = 0$$

cioè l'eq. omogenea associata ad $ax + by + c = 0$

$\rightarrow$ SOLUZIONE $[(-b, a, 0)]$

e osserviamo che questa classe contiene tutti e soli i vettori che, eliminando l'ultima componente che è nulla, sono nello spazio di traslazione di r.

(Tale spazio è generato da $(-b, a)$).

e si tratta di un sottospazio di dim $= 1$

Def: In $\mathbb{K}^3$ sia $V_1 = [(x_1\, x_2\, x_3)]$ un sottospazio 1-dimensionale.

Se $x_3 \neq 0$ chiamiamo V_1 **PUNTO PROPRIO** DI $\mathbb{P}\mathbb{K}^3$

se $x_3 = 0$ chiamiamo V_1 PUNTO IMPROPRIO di $\mathbb{P}\mathbb{K}^3$

PUNTI **PROPRI** <=> PUNTI DI $AG(2, \mathbb{K})$

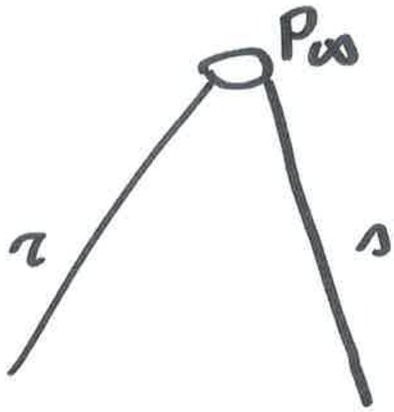
PUNTI **IMPROPRI** <-> DIREZIONI IN $AG(2, \mathbb{K})$.

↓

punti di fuga nell'ambito della prospettiva.

↓

punti all'infinito.



$$r: \ ax + by + c = 0 \rightarrow r_\infty = [(-b, a, 0)]$$

$$s: \ ax + by + c' = 0 \rightarrow s_\infty = [(-b, a, 0)].$$

Due rette parallele hanno i medesimi punti impropri.

Teorema: Due rette distinte nel piano... si intersecano sempre in un punto.

PROPRIO se non sono parallele

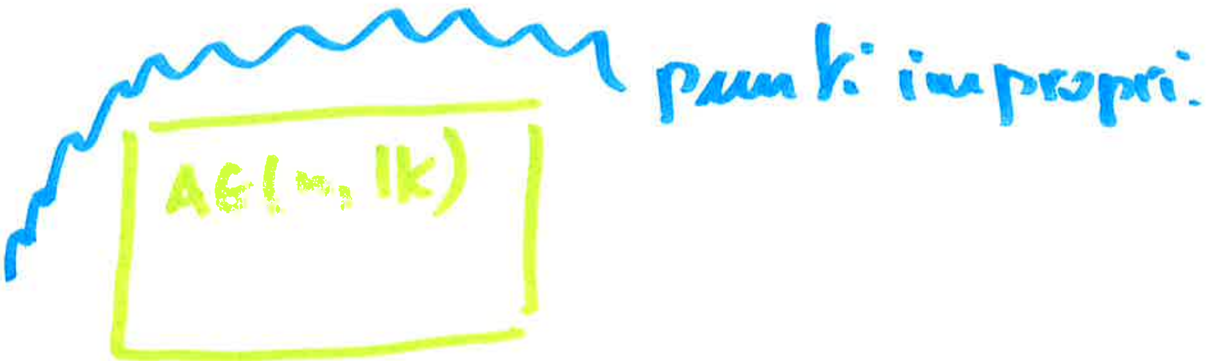
IMPROPRIO se sono parallele.

Sia $\mathbb{K}^{n+1}$ uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$.

Chiamiamo geometria proiettiva di dimensione n, indicata come $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n+1}$ o $PG(n, \mathbb{K})$ la geometria i cui "punti" sono dati dai sottospazi di $\mathbb{K}^{n+1}$ di dimensione 1 e i cui <u>sottospazi proiettivi di dimensione proiettiva k</u> sono dati dall'insieme dei punti contenuti in uno spazio vettoriale V_{k+1} di dimensione vettoriale (rango) $k+1$.

DATO $AG(n, \mathbb{K})$ esiste una funzione $\varphi : AG(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{P}\mathbb{K}^{n+1}$ che é iniettiva e che manda sottospazi affini in sottoinsiemi di sottospazi proiettivi della medesima dimensione.

Chiamiamo punti propri i punti di $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n+1}$ che vengono da punti affini; punti impropri gli altri. I punti impropri di $\mathbb{P}\mathbb{K}^{n+1}$ corrispondono alle direzioni delle rette di $AG(n, \mathbb{K})$.



Sia Σ un sottospazio di $AG(n, \mathbb{K})$ descritto dal sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B$$

$$A \begin{bmatrix} \xi_1/\xi_{n+1} \\ \vdots \\ \xi_n/\xi_{n+1} \end{bmatrix} = B \qquad x_i = \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}}$$

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \xi_{n+1} B$$ $n+1$ incognite

cioè $$(A|B) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

N.B. $rk(A|B) = rk(A)$ per R/C.

Quindi se $\dim(\Sigma) = k$

dim vettoriale delle sol. di

$$(A|B) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = k+1$$

I sottospazi affini di dim $= k$ sono rappresentati da sott. proiettivi di rango $k+1$.

Teorema: In $\mathbb{P}\mathbb{K}^3 = \mathbb{P}^2\mathbb{K}$
due rette distinte si intersecano
sempre in un punto.

DIM: $r = W_2$, $s = T_2$ due rette
rapp. da s. vettoriali di rango 2.
siamo in uno spazio di dim $= 3$

$\Rightarrow$ per GRASSMANN:

$$\dim(W_2 \cap T_2) = 1$$

$\Rightarrow r \cap s$ è un punto.

Teorema ($\exists$ proiezione ortogonale).

$$\Sigma = [P; W_K]$$

Q

mostriamo che $[Q; W_K^\perp] \cap \Sigma \neq \phi$.

Σ ha dim $K \to$ rapp. da un $U_{K+1} \leq \mathbb{K}^{n+1}$

$[Q; W_K^\perp]$ ha dim $n-K \to$ rapp. da un $U_{n-K+1} \leq \mathbb{K}^{n+1}$

per Grassmann $\dim(U_{K+1} \cap U_{n-K+1}) \geq 1$ $\square$

Fasci di rette.

In $PG(2, \mathbb{K})$ siano $A = [(x_1\ x_2\ x_3)]$
$B = [(y_1\ y_2\ y_3)]$

due punti distinti.
La retta per A e B è rappresentata

dal sottospazio $A \oplus B = \mathcal{L}((x_1\ x_2\ x_3)\ (y_1\ y_2\ y_3))$.

Siano $A = [(x_A\ y_A\ 1)]$
$B = [(x_B\ y_B\ 1)]$

cosa significa $[(x\ y\ 1)] \in$ alla retta per A e B.

$$[(x, y, 1)] \in \mathcal{L}((x_A\ y_A\ 1)\ (x_B\ y_B\ 1))$$

$$\iff rk \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix} = ?$$

N.B Se avessimo preso un pto proprio e uno improprio.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ \ell & m & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$B = [(\ell \;\; m \;\; 0)]$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\ell \\ y = y_A + tm \end{cases}$$

$$[(\ell \;\; m \;\; 0)] \qquad \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$[(\ell' \;\; m' \;\; 0)]$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \ell & m & 0 \\ \ell' & m' & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

i) ~~[illegible]~~

1) ~~[illegible]~~ non ci sono punti propri.

2) se cerchiamo soluzioni proiettive

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \ell & m & 0 \\ \ell' & m' & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \ell & m \\ \ell' & m' \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow x_3 = 0$ → retta impropria
= insieme di tutti i punti impropri.

Fascio proprio = insieme delle rette del piano per un punto proprio.

Fascio improprio = insieme delle rette del piano che hanno tutte una stessa dir.
= insieme delle rette del piano ~~che hanno~~ per un punto improprio

OSS: In generale in $PG(n, \mathbb{K})$ i punti sono rappresentati da classi di proporzionalità a meno di un coeff. non nullo di elementi di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Scriveremo per l'insieme di tali classi
$$\frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}.$$

intendendo che i suoi elementi sono del tipo
$$[(x_1 \dots x_{n+1})] = \{\alpha(x_1 \dots x_{n+1}) \mid \alpha \neq 0\}.$$

con $(x_1 \dots x_{n+1}) \neq \underline{0}$.

Ogni classe si può anche identificare con il punto (= sott. 1-dim) che rappresenta (ma bisogna escludere il vettor nullo).

In generale delle eq. che descrivono degli enti in $PG(n, \mathbb{K})$ devono essere tali che se $(\xi_1 \dots \xi_{n+1})$ é soluzione $\Rightarrow$ $\alpha(\xi_1 \dots \xi_{n+1})$ é ancora soluzione perchè entrambe le n-uple rappresentano lo stesso punto.

$\downarrow$

Tali equazioni devono essere <u>omogenee</u>.

In particolare se si parte da una equazione affine

$$f(x, y) = 0 \qquad x_3^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

$\downarrow$

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0 \longrightarrow F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

ove $\quad F(x_1\ x_2\ x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$

e in $F(x_1 x_2 x_3)$ ogni monomio ha il medesimo grado $\to$ eq. omogenea.

$$x^3 - 3xy + y^2 + 7 = 0$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^3 - 3\left(\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 7 = 0$$

$$\underline{x_1^3 - 3x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + 7x_3^2 = 0}$$

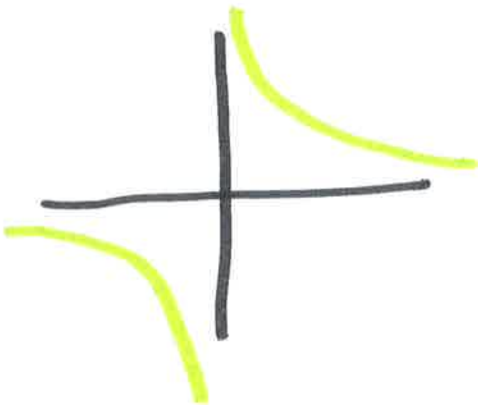
Indichiamo con $\tilde{V}(F)$ i punti di $PG(2, \mathbb{k})$ le cui coordinate omogenee sono autosoluzioni (i.e. soluzioni $\neq \underline{0}$) dell'eq. omogenea $F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$. e osserviamo che i punti propri di $\tilde{V}(F)$ sono proprio i corrispondenti dei punti di $V(f)$.

$y = x^2$

$x_1^2 = x_2 x_3$ i punti impropri sono

$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ e dunque

$[(0\ 1\ 0)] = y_\infty$



$xy = 1$

iperbole

$\downarrow$

$x_1 x_2 = x_3^2$

a sistema con $x_3 = 0$

$x_1 = 0 \quad [(0\ 1\ 0)] = y_\infty$

oppure

$x_2 = 0 \quad [(1\ 0\ 0)] = x_\infty$