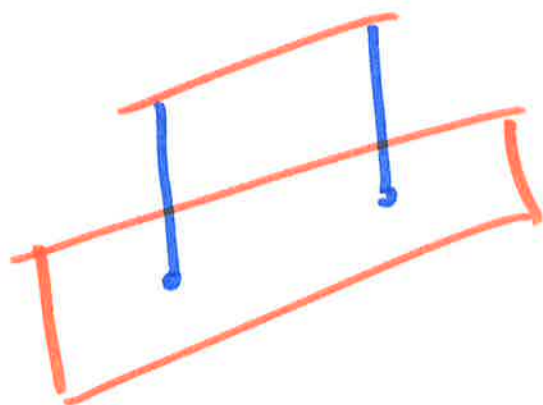


Geometria Euclidea

- 1) Siano Π e Σ due sottospazi paralleli $\Rightarrow$ ogni punto di Π (risp. Σ) è alla medesima distanza da Σ (risp. Π).

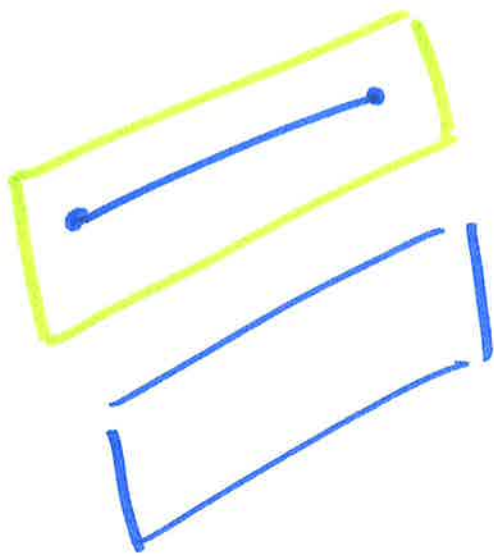


DV4: 1) Se $\Pi // \Sigma$ allora $\exists$ due iperpiani paralleli Λ, Θ tali che $\Lambda \supseteq \Pi$ e $\Theta \supseteq \Sigma$.

$$\Pi = [P; W] \quad \Sigma = [Q; M]$$

con $W \subseteq M \Rightarrow$ prendiamo un sottospazio di dim = $n-1$ T con

$$M \subseteq T \text{ e costruiamo } \Lambda = [P; T] \\ \Theta = [Q; T]$$



2) Siano Λ, Σ due iperpiani paralleli; allora

$$\exists \delta : \forall P \in \Lambda, d(P, \Sigma) = \delta$$

Dim: prendiamo le equazioni degli iperpiani

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b' = 0$$

ed usiamo la formula della distanza
punto/iperpiano (si vede che come per le rette
non dipende dai punti scelti).

3) Siano $\Lambda = [P, W], \Sigma = [Q, U]$ un sottospazio ed un
iperpiano ad esso parallelo $W \subseteq U$. Allora,
 $\exists \delta : \forall P \in \Lambda, d(P, \Sigma) = \delta$

Dim: come sopra, osservando che tutti i punti di $[P, U]$ sono equidistanti da Σ

4) Siano $\Lambda = [P, W], \Sigma = [Q, U]$ con $W \subseteq U$

Allora Σ e' un iperpiano in $[Q, U + L(\overrightarrow{PQ})]$

5) La distanza fra due spazi paralleli come sopra non dipende da quale punto si considera in Λ

Dim: applichiamo 4 e poi 3.

Siano $\Pi = [P; U]$, $\Sigma = [Q; W]$ due sottospazi paralleli con $U \subseteq W$.

Teorema: $\forall X, Y \in \Pi: d(X, \Sigma) = d(Y, \Sigma)$.

(la distanza dei punti di Π da Σ è costante).

Def: poniamo $d(\Pi, \Sigma) := d(X, \Sigma)$ con $X \in \Pi$.

DIM 1) La distanza fra due iperpiani ^{paralleli} coincide con la distanza di un qualsiasi punto di uno di essi dall'altro.

→ Siano Π iperpiano di eq. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$
 Σ iperpiano di eq. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b' = 0$

$$\Rightarrow \forall P \in \Pi: d(P, \Sigma) = \frac{|b - b'|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{ove } \vec{n} = (a_1 \dots a_n).$$

non dipende da P .

2) Se $\Pi \parallel \Sigma$, $U \subseteq W$ e Σ iperpiano $\Rightarrow$

$$\forall X, Y \in \Pi: d(X, \Sigma) = d(Y, \Sigma).$$

→ prendiamo lo spazio $\Pi' = [P; W] \supseteq \Pi$.

Π', Σ iperpiani paralleli $\Rightarrow$ la tesi segue da (1).

3) Se $\Pi \parallel \Sigma$, $U \subseteq W \Rightarrow \Theta = [Q; W + L(\vec{PQ})]$ è tale che

a) $\Pi, \Sigma \subseteq \Theta$ b) Σ è iperpiano in Θ .

4) In Θ applichiamo le (2) $\Rightarrow \square$.

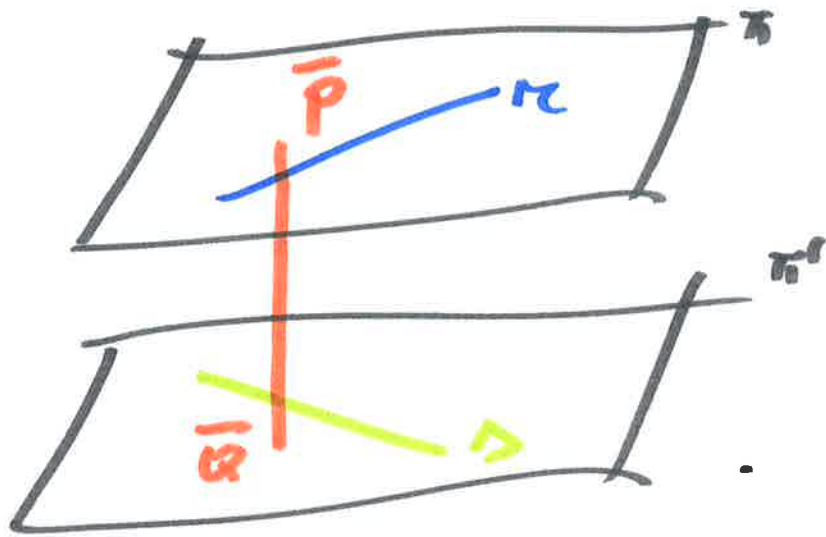
N.B.: Se $\dim \Sigma > \dim \Pi$ non è detto che $\forall X, Y \in \Sigma, d(X, \Pi) = d(Y, \Pi)$ infatti gli unici punti di Σ a distanza minima da Π sono quelli della proiezione ortogonale di Π su Σ .

Cosa dire quando 2 sottospazi:
non sono paralleli e non si
intersecano?

→ rette sghembe in $EG(3, \mathbb{R})$.

κ, λ siano 2 rette sghembe.

$$d(\kappa, \lambda) = \min \{ d(P, Q) \mid P \in \kappa, Q \in \lambda \}.$$

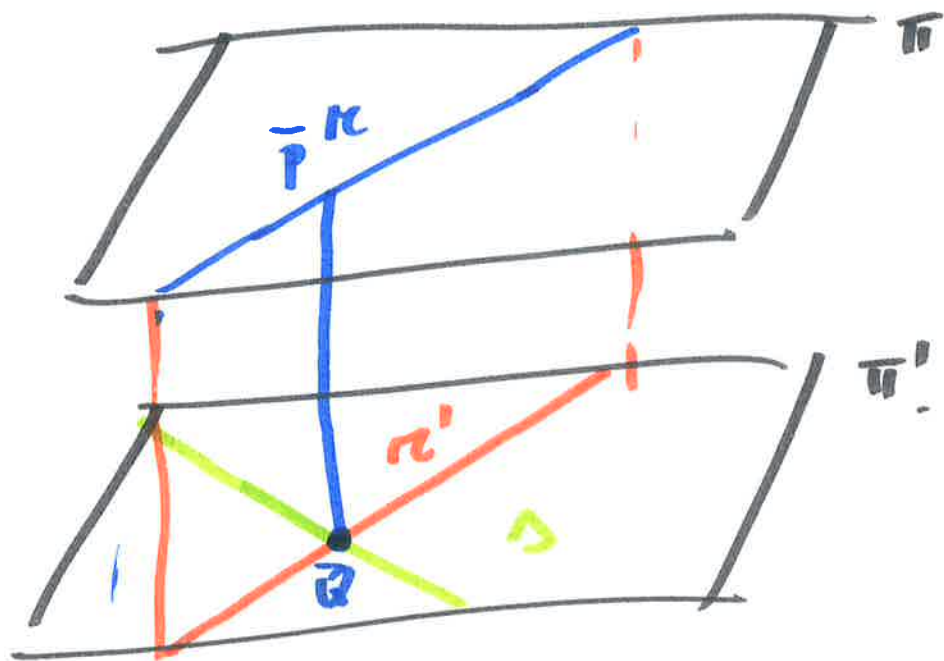


è chiaro che $d(\pi, \pi') \leq d(\kappa, \Delta)$
 perché $d(\pi, \pi') = \min \{d(P, Q) \mid P \in \pi, Q \in \pi'\}$
 $\leq \min \{d(P, Q) \mid P \in \kappa; Q \in \Delta\}$

MOSTRIAMO CHE $\exists (\bar{P}, \bar{Q}) \in (\kappa, \Delta)$
 tali che $d(\bar{P}, \bar{Q}) = d(\pi, \pi')$.

DOBBIAMO FAR VEDERE CHE
 $\exists \bar{P} \in \kappa$ tale che $\bar{Q} \in \Delta$ e $\bar{Q}$ è
 la proiezione ortogonale di $\bar{P}$ su π' .

A tal fine consideriamo la
 proiezione ortogonale della retta
 κ sul piano π' .



OSSERVIAMO CHE SE

$$\kappa_0 = [A, V_2] \quad \Delta = [B, W_2]$$

$$\Rightarrow \pi = [A, V_2 + W_2] \quad \pi' = [B, V_2 + W_2]$$

κ $A' =$ proiezione di A su π'

$\Rightarrow \kappa' = [A', V_2]$ proiezione di κ

su π' . la proiezione di κ

su π' è parallela ad κ . $\Rightarrow$

la proiezione di κ su π' interseca

Δ in un punto perché $\kappa \not\parallel \Delta$.

$\bar{Q}$ e $\bar{Q}$ è proiezione di un punto $\bar{P}$ di κ .

e quindi abbiamo finito perché
 $\bar{P}, \bar{Q}$ sono 2 punti tali che
 $\bar{P} \in \pi, \bar{Q} \in \sigma$ e $\overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}}$ è ortogonale a
 $V_1 + W_1$. $\square$

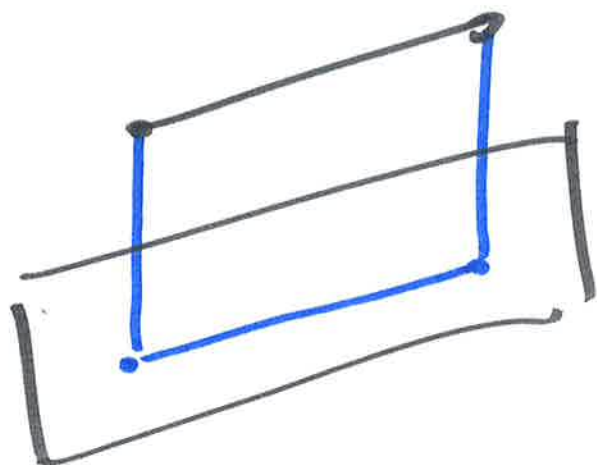
Oss: 1) $\bar{Q} = \Delta \cap \pi'$ similmente
 $\bar{P} = \pi \cap \Delta'$ ove Δ' = proiezione
ortogonale di σ su
 π .

2) i punti $\bar{P}, \bar{Q}$ sono univocamente
determinati.

3) Def la retta per $\bar{P}, \bar{Q}$ è detta
retta di minima distanza fra
 π ed σ ed è l'unica retta
ortogonale sia ad π che ad σ
ed incidente entrambe. $\square$

oss: Abbiamo usato il fatto che

Teorema: La proiezione ortogonale
di un sottospazio su di un
sottospazio ad esso parallelo è
parallela al sottospazio di partenza.



Infatti se $\Sigma = [P, W]$ $\Sigma \parallel \mathcal{U}$

$\Pi = [Q, \mathcal{U}]$

con $W \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ la proiezione ort. di Σ

su Π è $[P', W]$ ove

P' è la proiezz. di un punto di Σ .

Def: Ragionare in coordinate con riferimento ortogonale di

Π tale che le eq. di Π

siano $x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0$

$t = \dim \Pi$

□

Luogo geometrico.

Insieme di punti di $EG(n, \mathbb{R})$

che soddisfano determinate

condizioni



equazioni che descrivono
il luogo.

ASSE (IPERPIANO ASSIACE) DI UN
SEGMENTO

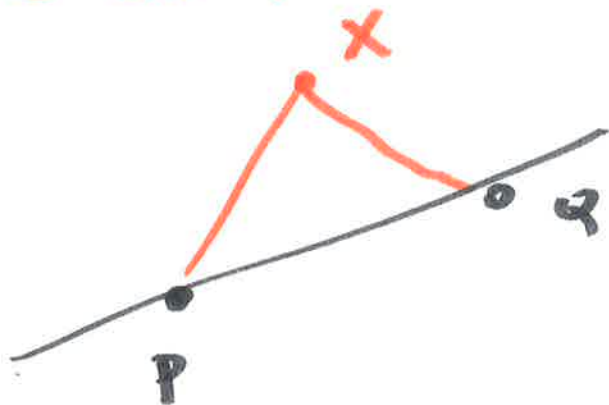
$P \neq Q$

Siano P, Q due punti di $EG(2, \mathbb{R})$

Si dice "asse del segmento di estremi

P, Q " il luogo dei punti equidistanti;

da P e da Q.



$$d(P, X) = d(Q, X)$$

1) caratterizzazione geometrica

2) caratterizzazione analitica

$$P = (x_0, y_0)$$

$$Q = (x_1, y_1)$$

$$d(P, X) = d(Q, X)$$

$$X = (x, y)$$

$$d(P, X)^2 = d(Q, X)^2$$

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$$

1) Teorema: Sia $M = P + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ}$ il
punto medio del segmento ^{distanza} P e Q.

Allora l'asse del segmento è la retta
per M ortogonale alla direzione $\overrightarrow{PQ}$.

DM:

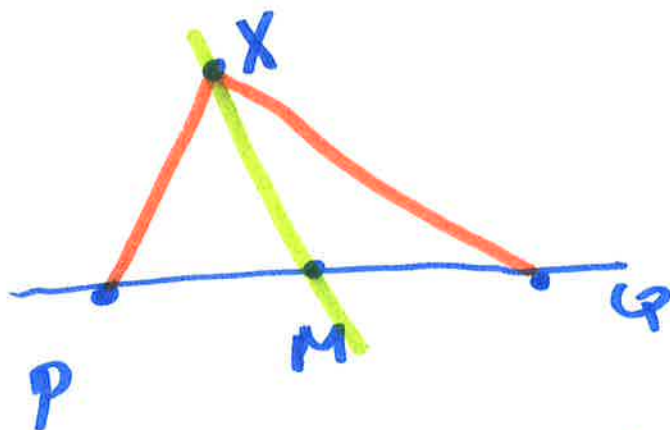
1) osserviamo che se

$$M = P + \frac{1}{2}\vec{PQ} \Rightarrow Q = M + \frac{1}{2}\vec{PQ} = P + \vec{PQ}$$

quindi: $\vec{PM} = \vec{MQ} \Rightarrow d(P, M) = d(Q, M)$.

il punto medio fra P e Q appartiene all'asse.

2)



Sia X tale che $d(P, X) = d(Q, X)$

$$\|\vec{PX}\|^2 = \|\vec{QX}\|^2$$

$$\vec{PX} = \vec{PM} + \vec{MX}$$

$$\vec{QX} = \vec{QM} + \vec{MX} = \vec{MX} - \vec{PM}$$

$$\vec{PX} \cdot \vec{PX} = \vec{PM} \cdot \vec{PM} + \vec{PM} \cdot \vec{MX} + \vec{MX} \cdot \vec{PM} + \vec{MX} \cdot \vec{MX}$$

$$\vec{QX} \cdot \vec{QX} = \vec{PM} \cdot \vec{PM} - \vec{PM} \cdot \vec{MX} - \vec{MX} \cdot \vec{PM} + \vec{MX} \cdot \vec{MX}$$

sono uguali $\Leftrightarrow \vec{PM} \cdot \vec{MX} = 0$ cioè $\vec{MX} \perp \vec{PM}$

$\Rightarrow X$ deve appartenere alla retta per M ortogonale a $\vec{PQ}$.

Viceversa: se X appartiene alla retta per M ortogonale a $\vec{PQ}$ per le stesse eq. di prima si ha $d(P, X) = d(Q, X)$. $\square$.

Oss: La definizione di punto medio fra P e Q non necessita della nozione di distanza.

$$\text{Infatti } M = P + \frac{1}{2} \vec{PQ}.$$

Cosa succede in dimensione $n > 2$?

La dimostrazione del teorema simmetrica resta identica e fornisce che i punti sull'iperpiano assiale sono tutti e soli gli X tali che

$\vec{MX} \perp \vec{PQ} \rightarrow$ solo che adesso questo luogo non è una retta ma un'iperpiano.

Esempio 2 di luogo geometrico

Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto di
 $EG(2, \mathbb{R})$. Luogo dei punti a
 $d \geq 0$

distanza $d > 0$ fissata da P .



CIRCONFERENZA.

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = d^2$$

$$(*) \quad x_0 x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y = d^2 - x_0^2 - y_0^2$$

$$(\Delta) \quad \alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

con opportune condizioni su
 α, β, γ e δ .

$$\text{atto} \quad \frac{\beta}{\alpha} = -2x_0 \quad \frac{\gamma}{\alpha} = -2y_0$$

$$\delta + x_0^2 + y_0^2 - d^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{d^2}{\alpha^2}\right) \frac{\pi^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{2} = x_0^2 + y_0^2 - d^2}$$

$$\frac{\delta}{2} = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 - d^2$$

$$d^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\delta}{2} > 0$$

vediamo che ci sono delle condizioni che devono essere soddisfatte affinché (Δ) rappresenti una circonferenza.

COSA SUCCEDERÀ SE CI DIMENTICHIAMO DI QUESTE CONDIZIONI.



possiamo ottenere una

CIRCONFERENZA GENERALIZZATA

Nel caso specifico: Se $d=0$ ABBIAMO UNA RETTA.

$d=0; (\beta, \gamma) \neq (0,0)$ retta. (1)

$d \neq 0; d^2 = 0 \rightarrow$ otteniamo (2)

una circonferenza di raggio $= 0$

$\Rightarrow$ un punto.

$d \neq 0; d^2 < 0 \rightarrow$ NON ESISTONO PUNTI (3)

REALI CHE SODDISFANO
L'EQUAZIONE.

$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0); \delta \neq 0 \rightarrow$ NON $\exists$ soluzioni

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,0,0,0)$ l'eq. è identicamente
soddisfatta
 $\Rightarrow \forall$ punto.

(1) il problema è che il grado dell'eq.
diventa $= 1$

(2) abbiamo una ed una sola soluzione
anche se l'oggetto è descritto da
una eq. in 2 incognite.

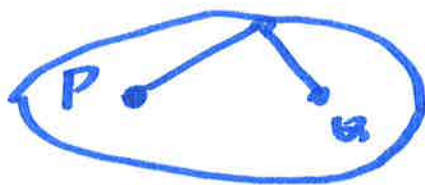
(3) NON CI SONO SOLUZIONI REALI
MA L'EQ. HA UN SENSO AD ESEMPIO IN
 $\mathbb{C}$.

possiamo essere interessati

Esempi di luoghi geometrici.

DATI P, Q nel piano

luogo dei punti la cui
somma delle distanze da P e Q
è costante $\rightarrow$ ellissi



$$d(P, X) + d(Q, X) = d$$

luogo dei punti la cui differenza
delle distanze da P e Q è costante.

$\rightarrow$ iperboli

$$d(P, X) - d(Q, X) = d$$

dato P punto e retta:

luogo dei punti la cui distanza
da P e da r è la stessa.

$\rightarrow$ parabole.

$$d(X, P) = d(X, r).$$

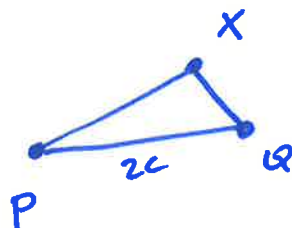
Equazione Ellisse.

Fissiamo

$$P = (c, 0)$$

$$Q = (-c, 0)$$

$$d(P, Q) = 2c$$



$$2c = d(P, Q) \leq d(P, X) + d(Q, X) = d$$

$$d(P, X) + d(Q, X) = d \quad \text{con } d \geq 2c$$

↓

$$[d(P, X) + d(Q, X)]^2 = d^2$$

$$(x-c)^2 + (x+c)^2 + 2y^2 + 2[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} = d^2$$

$$d^2 - 2(x^2 + y^2 + c^2) = 2[(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(*) \uparrow \text{ if } d^2 \geq 2(x^2 + y^2 + c^2)$$

$$\frac{d^4}{4} + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - d^2(x^2 + y^2 + c^2) = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2$$

$$(*)' \quad (d^2 - 4c^2)x^2 + d^2y^2 = \frac{d^4}{4} - d^2c^2$$

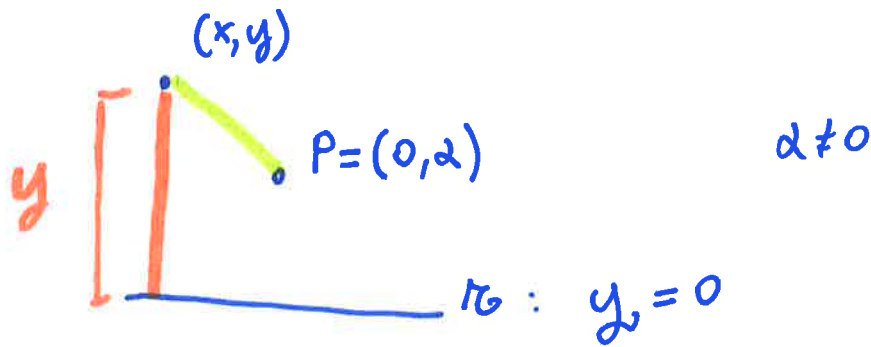
$$\rightarrow x^2 \leq \frac{d^2}{4} \quad y^2 \leq \frac{d^2}{4} - c^2$$

$$\Rightarrow d^2 \geq 2(x^2 + y^2 + c^2)$$

N.B $(*)' \Rightarrow (*)$.

$$d^2 - 4c^2 \geq 0$$

Equazione Parabola:



$$d(P, X) = d(r_0, X) \Leftrightarrow d(P, X)^2 = d(r_0, X)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - \alpha)^2 = y^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha y + \alpha = y^2$$

$$y = \frac{x^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} \quad \alpha \neq 0$$

Def: Sia $f(x, y)$ un polinomio non costante in x ed y .

Si dice curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$ il luogo dei punti di $E6(2, \mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfanno l'equazione data.

$V(f) =$ curva algebrica di eq. $f(x, y) = 0$.

Def Δ : Ellisse

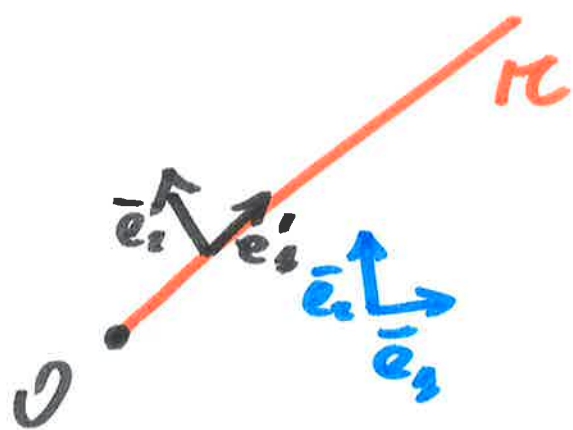
$$d(P, X) + d(Q, Y) = 0$$



equazioni con radicali che si semplificano.

Oss 1: la def. di un luogo geometrico non dipende dall'aver fissato un riferimento.

- le equazioni di un luogo geometrico dipendono dalla scelta del riferimento.



$$[O; (\bar{e}_1, \bar{e}_2)]$$

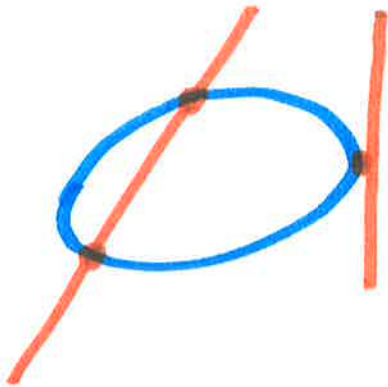
$$\pi : y = 0$$

$$[O; (e_1, e_2)]$$

$$y = x$$

In generale le equazioni di un luogo dipendono dal riferimento ma certe proprietà no; ad esempio il grado oppure i numeri di intersezione fra una curva e delle rette.

e queste proprietà si riducono in proprietà delle equazioni.



FINE: Studiare delle curve (superfici) algebriche studiando le loro equazioni ma determinando da queste le proprietà "essenziali" (geometriche) che possono essere indipendenti dal riferimento.

→ LAUDRADE IN UN AMBIENTE IN CUI È "FACILE" GESTIRE LE EQUAZIONI STESSA.