Lemma. Sia $\Sigma \subseteq AG(n, \mathbb{K})$. $\Sigma \neq \emptyset$

Allora Σ é sottospazio se e solamente se $\forall P, Q, R \in \Sigma$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $P + \alpha \overrightarrow{QR} \in \Sigma$.

DIM: Se Σ sottospazio $\Rightarrow \Sigma = [P; W]$ con $W \leq V_n(\mathbb{K})$, $\overrightarrow{QR} \in W$ $\forall Q, R \in \Sigma$

$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{QR} \in W$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall Q, R \in \Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow P + \alpha \overrightarrow{QR} \in \Sigma$.

Viceversa: poniamo

$$W = \{\alpha \overrightarrow{QR} \mid \alpha \in \mathbb{K}, Q, R \in \Sigma\}$$

per la condizione data $[P; W] \subseteq \Sigma$.

Mostriamo che $W \leq V_n(\mathbb{K})$.

Infatti: se $\alpha \overrightarrow{QR} \in W \Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{K}$

$$\beta(\alpha \overrightarrow{QR}) = (\beta\alpha)\overrightarrow{QR} \in W$$

Inoltre: siano $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in W$

$\Rightarrow B + \overrightarrow{CD} = B' \in \Sigma$ e $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} \in W$

Infine $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall A, B \in \Sigma$: $A + \alpha \overrightarrow{AB} = B' \in \Sigma$

e $\overrightarrow{AB'} = \alpha \overrightarrow{AB}$ quindi ogni el. di W si scrive come $\overrightarrow{AB}$ per opportuni A, B.

per concludere osserviamo che se

$X \in \Sigma \Rightarrow \overrightarrow{PX} \in W \Rightarrow X \in [P; W]$.

ne segue
$$[P;W] \subseteq \Sigma \subseteq [P;W] \quad \square$$

<u>N.B</u>: la condizione su $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ serve per avere un sottospazio.

Altrimenti non si riesce a dimostrare che $W \leq V_n(\mathbb{K})$ ma solo che $(W, +)$ deve essere un sottogruppo di $(V_n, +)$.

ESEMPIO: $\Sigma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

Teorema: Siano Σ, Π sottospazi di $EG(n,\mathbb{R})$ e $\varphi: EG(n,\mathbb{R}) \to \Pi$ la proiezione ortogonale su Π.
Allora $\varphi(\Sigma)$ è un sottospazio di Π.

DIM: Sia $\Pi = [P; W]$ e fissiamo una base ortonormale di W, diciamo $\mathcal{B}_W = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K)$.
Completiamo $\mathcal{B}_W$ a base ortonormale di $V_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e consideriamo il riferimento euclideo $\Gamma = (P, \mathcal{B})$.
In questo riferimento W ha equazioni $x_{K+1} = \dots = x_n = 0$ e $W^\perp = \mathcal{L}(\bar{e}_{K+1} \dots \bar{e}_n)$.
Sia $P = (\xi_1 \dots \xi_n) \in EG(n,\mathbb{R})$
$\Rightarrow$ lo spazio ortogonale a Π per P è $[(\xi_1 \dots \xi_n), W^\perp] = \Omega$

ed ho equazioni $x_1 = \xi_1 \dots x_k = \xi_k$.

Dunque $\Omega \cap \Pi = \{(\xi_1 \dots \xi_k\ 0\ 0 \dots 0)\}$

Ne segue che in questo riferimento

$$\boxed{\varphi(x_1\ x_2 \dots x_n) = (x_1 \dots x_k\ 0 \dots 0)}$$

Sia ora $\Sigma = [Q; \mathcal{U}]$ un sottospazio affine $\Rightarrow \forall X \in \Sigma$

$$X = (q_1 \dots q_n) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_{i1} \dots u_{in})$$

ove $(u_{i1} \dots u_{in}) = \bar{u}_i$ sono generatori di $\mathcal{U}$. $\Rightarrow$

$$\varphi(X) = \varphi\Big(q_1 + \sum \alpha_i u_{i1}\ \ q_2 + \sum \alpha_i u_{i2} \dots$$

$$q_k + \sum \alpha_i u_{ik} \dots q_n + \sum \alpha_i u_{in}\Big)$$

$$= \Big(q_1 + \sum \alpha_i u_{i1} \dots q_k + \sum \alpha_i u_{ik}\ 0\ 0 \dots 0\Big)$$

$$= (q_1 \dots q_k\ 0\ 0 \dots 0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_{i1} \dots u_{ik}\ 0\ 0 \dots 0)$$

APPLICHIAMO ADESSO IL LEMMA.

E MOSTRIAMO CHE $\forall\, \varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R) \in \varphi(\Sigma)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\varphi(P) + \alpha \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)} \in \Sigma$.

$$P = (p_1 \text{ — } p_n) \Rightarrow \varphi(P) = (p_1 \text{ — } p_k\ 0\ 0 \dots 0)$$
$$Q = (q_1 \dots q_n) \Rightarrow \varphi(Q) = (q_1 \dots q_k\ 0\ 0 \text{ — } 0)$$
$$R = (r_1 \dots r_n) \Rightarrow \varphi(R) = (r_1 \dots r_k\ 0\ 0 \text{ — } 0).$$

$$\varphi(P) + \alpha \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)} =$$

$$(p_1 + \alpha r_1 - \alpha q_1 \dots p_k + \alpha r_k - \alpha q_k\ 0\ 0 \dots 0) =$$

$$= \varphi(\underbrace{P + \alpha \overrightarrow{QR}}_{\in \Sigma \text{ perché } \Sigma \text{ sottospazio}})$$

$\square$

Lemma:

Siano P, Q, R tre punti; $\Sigma = [S, W]$ un sottospazio e $\varphi : EG(n, \mathbb{R}) \to \Sigma$ la proiezione ortogonale su Σ.

Allora
$$\varphi(P + \overrightarrow{QR}) = \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}.$$

DIM: Fissiamo un rif. ortogonale tale che

$$\Sigma : x_{k+1} = 0 = x_{k+2} = \dots = x_n$$

$$P = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \quad Q = (\beta_1 \dots \beta_n) \quad R = (\gamma_1 \dots \gamma_n)$$

$\Rightarrow P + \overrightarrow{QR}$ ha coord. $(\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 \dots \alpha_n + \gamma_n - \beta_n)$

$\varphi(P + \overrightarrow{QR})$ ha coord. $(\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 \dots \alpha_k + \gamma_k - \beta_k \; 0 \; 0 \dots 0)$.

$$\varphi(P) = (\alpha_1 \dots \alpha_k \; 0 \; 0 \dots 0)$$
$$\varphi(Q) = (\beta_1 \dots \beta_k \; 0 \; 0 \dots 0)$$
$$\varphi(R) = (\gamma_1 \dots \gamma_k \; 0 \; 0 \dots 0)$$

$$\Rightarrow \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)} = (\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 \dots \alpha_k + \gamma_k - \beta_k \; 0 \; 0 \dots 0)$$

$\square$

Teorema: Siano $\Pi = [P, W]$; $\Sigma = [Q; \mathcal{U}]$, $W \subseteq \mathcal{U}$ due sottospazi affini e $\varphi : EG(n, \mathbb{R}) \to \Sigma$ la proiezione ortogonale su Σ.
Allora $\varphi(\Pi) // \Pi$.

[in altre parole: la proiezione ortogonale di Π su di uno spazio Σ parallelo a Π é essa stessa parallela a Π].

<u>DIM</u> Mostriamo la seguente proprietà

Lemma: $\varphi(\Pi) = [\varphi(P), \tilde{\varphi}(W)]$ ove $\tilde{\varphi} : V_n^{\circ}(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}$ é la proiezione dei vettori di W sul sottospazio $\mathcal{U}$.

<u>DIM</u> lemma: $\forall \bar{w} \in W \ \exists R, S \in \Pi : \bar{w} = \overrightarrow{RS}$.

$\tilde{\varphi}(\bar{w}) = \overrightarrow{\varphi(R)\varphi(S)}$

In particolare se $[\varphi(P), X] = \varphi(\Pi)$ abbiamo $\tilde{\varphi}(\bar{w}) \in X \Rightarrow [\varphi(P), \tilde{\varphi}(W)] \subseteq \varphi(\Pi)$.

Viceversa: sia $L \in \varphi(\Pi) \Rightarrow \exists A, B \in \varphi(\Pi)$:

$L = P + \overrightarrow{AB}$ da cui $L = P + \overrightarrow{\varphi(A')\varphi(B')}$

per opportuni A', B' preimmagini di $A, B \Rightarrow$

$\Rightarrow L = P + \tilde{\varphi}(\overrightarrow{A'B'})$ da cui $[\varphi(P), \varphi(\bar{w})] \supseteq \varphi(\Pi)$

DIM (Teorema)

Dal Lemma segue che se $W \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \tilde{\varphi}(W) = W$

da cui $\varphi(\Pi) = [\varphi(P); W] // \Pi$. $\square$

OSSERVIAMO CHE SE SI PROIETTASSE Σ su Π con $W \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ DALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA SEGUIREBBE.

$\varphi(\Sigma) = \Pi$.