Geometria Euclidea

$\downarrow$

Geometria Affine + nozione di prodotto scalare su $V_n(\mathbb{K})$.

- distanza / angoli / ortogonalità.

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e supponiamo

- $V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

sia un prodotto scalare definito positivo

$$EG(n, \mathbb{R}) = AG(n, \mathbb{R}) + \text{prod scalare su } V_n(\mathbb{R}) \text{ def positivo.}$$

**Def**: Sia $EG(n, \mathbb{R})$ una geometria Euclidea con prod. scalare $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to V$ definito positivo.

$\forall P, Q \in EG(n, \mathbb{R})$ si dice distanza euclidea fra $P$ e $Q$ la $d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| =$

$$= \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}.$$

La funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}^+ := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

gode delle seguenti proprietà:

1) $d(P,Q) = 0 \iff \|\overrightarrow{PQ}\| = 0 \iff P = Q$

2) $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|-\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = d(Q,P)$

3) $\forall P, Q, R \quad d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

(disuguaglianza triangolare).

4) $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P, Q$.

N.B: Ogni funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}^+$ che soddisfa 1-4 è detta distanza su $AG(n, \mathbb{R})$.

Es. in $AG(n, \mathbb{K}) \approx (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f)$

$$d_H(P,Q) = |\{ i \mid p_i \neq q_i \}|$$

distanza di Hamming.

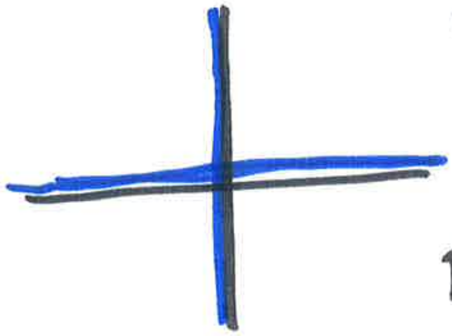
$$d_T(P,Q) = \max |p_i - q_i| \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$d_S(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$$

$$d_E(P,Q) = \sqrt{\sum (p_i - q_i)^2}$$

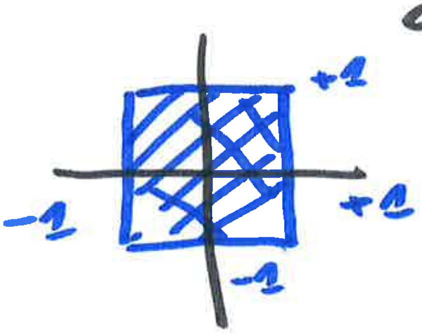
in $\mathbb{R}^2$ sia ~~$B_x$~~ $B_0^x(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_x((0,0),(x,y)) \leq 1\}$.

$d_H$



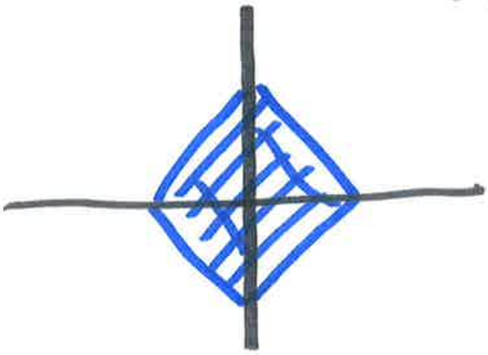
$$B_0^H(1) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

$d_T$



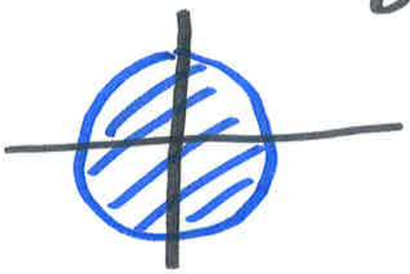

$$B_0^T = \{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1\}.$$

$d_S$



$$B_0^S = \{(x,y) \mid |x|+|y| \le 1\}.$$

$d_H$



$$B_0^E = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le 1\} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

---

<u>**Def:**</u> In $EG(n, \mathbb{R})$ si dice <u>riferimento Euclideo</u> un $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ riferimento affine in cui la base $\mathcal{B}$ è ortonormale.

<u>Teorema</u>: Sia $EG(n, \mathbb{R})$ uno spazio euclideo, $\Gamma$ un riferimento euclideo $P, Q$ due punti con coordinate rispettivamente $(x_1 — x_n)$ e $(y_1 — y_n)$.

$$\Rightarrow d_E(P,Q) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

<u>DIM</u>

$$\vec{PQ} = \sum_i (y_i - x_i)\,\bar{e}_i$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PQ} = \Big(\sum_i (y_i - x_i)\,\bar{e}_i\Big) \cdot \Big(\sum_j (y_j - x_j)\,e_j\Big)$$

$$= \sum_{i,j} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\,\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j)\,\delta_{ij} =$$

$$= \sum_i (x_i - y_i)^2$$

$$d(P,Q) = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}} = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \quad \square$$

<u>Def</u>: Siano

$$[P, U] \text{ e } [Q; W]$$

due sottospazi affini di $EG(n, \mathbb{R})$.

Si dice che essi sono <u>ortogonali</u> se

$\mathcal{U} \subseteq W^\perp$ oppure

$\mathcal{U}^\perp \subseteq W$.

N.B $\mathcal{U} \subseteq W^\perp \Leftrightarrow W \subseteq \mathcal{U}^\perp$

$\mathcal{U}^\perp \subseteq W \Leftrightarrow W^\perp \subseteq \mathcal{U}$

(Una delle 4 inclusioni deve valere).

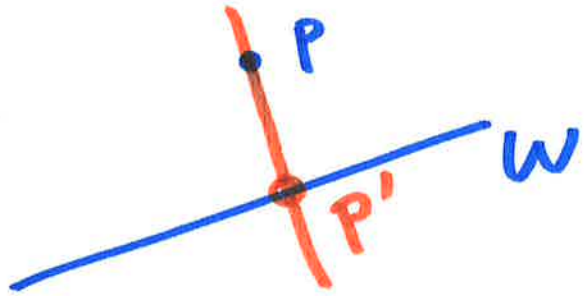
In particolare se $[P, \mathcal{U}]$ e $[Q, W]$ sono ortogonali scriveremo

$[P; \mathcal{U}] \perp [Q; W]$

Def: Sia $P$ un punto e $\Pi = [Q; W]$ un sottospazio.

Si dice proiezione ortogonale di $P$ su $\Pi$ il punto $P'$ che si ottiene come intersezione

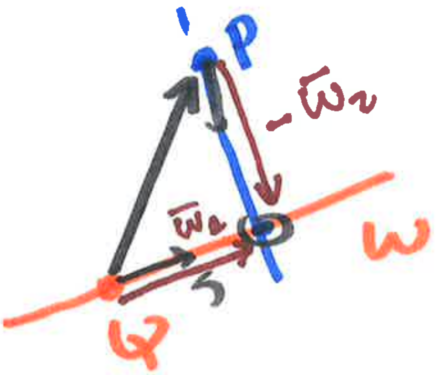
$\Pi \cap [P; W^\perp]$.



Verifichiamo che effettivamente la proiezione ortogonale di $P$ su $\pi$ è un punto.

1) $[P; W^\perp] \cap \pi \neq \emptyset$
2) $[P; W^\perp] \cap \pi$ contiene solo un punto.

DIM. OSSERVIAMO CHE $W^\perp \oplus W = V_n(\mathbb{R})$




$$\boxed{P = Q + \bar{w}_1 + \bar{w}_2}$$

$\bar{w}_1 \in W$

$\bar{w}_2 \in W^\perp$

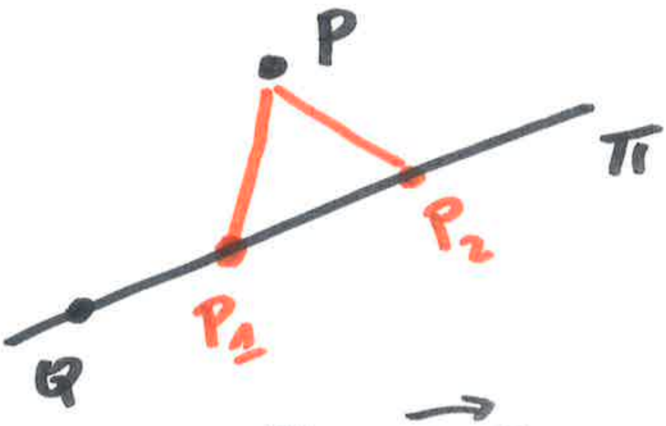
$$\overrightarrow{QP} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{P - \bar{w}_2}_{\in [P; W^\perp]} = \underbrace{Q + \bar{w}_1}_{\pi}}$$

$$P - \bar{w}_2 = Q + \bar{w}_1 \in [P; W^\perp] \cap \pi \neq \emptyset.$$

che il punto sia unico segue dal fatto che $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$.

Se ci fossero 2 proiezioni ortogonali di P su $\pi$




$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{P_1P}$$
$$= \overrightarrow{QP_2} + \overrightarrow{P_2P}$$

con: $\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \in W$

$\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_2P} \in W^\perp$

assurdo perché $W \oplus W^\perp$. $\square$

<u>Def:</u> Siano $\pi$, $\Sigma$ due sottospazi affini. Si dice <u>proiezione ortogonale</u> di $\pi$ su $\Sigma$ l'insieme di tutte le proiezioni ortogonali dei punti di $\pi$ su $\Sigma$.

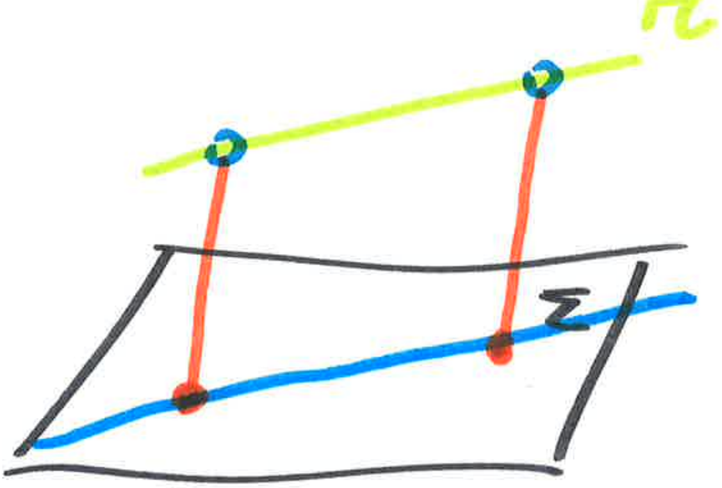
Teorema: Sia $\pi'$ la proiezione ortog. di $\pi$ su $\Sigma$.

Allora $\pi' \leq \Sigma$ è un sottospazio di $\Sigma$ generato dalle proiezioni ortogonali dei un qualsiasi insieme di punti di $\pi$ che lo generano.

DIM 1) $\pi'$ è sottospazio perché le proiez. ortogonali mandano sottospazi in sottospazi.

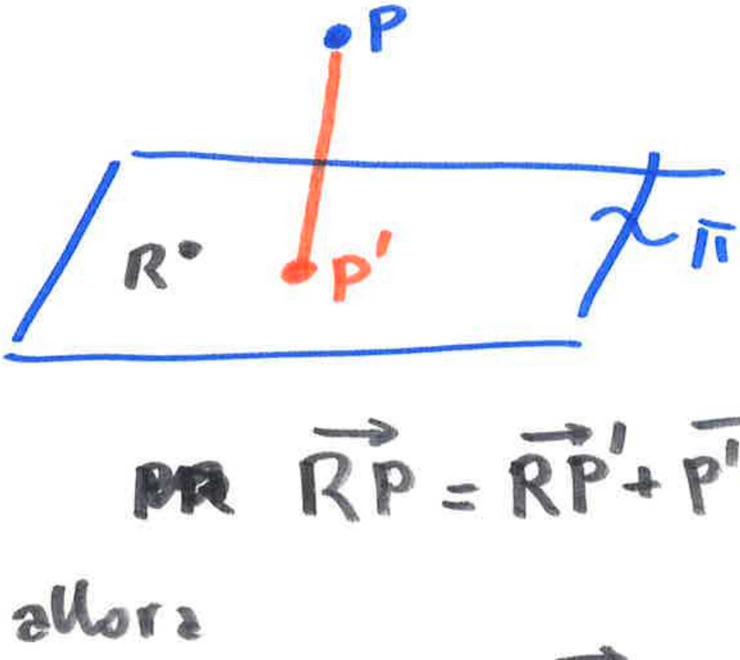
2) segue da 1.

$\square$



**Teorema:** Sia $P$ un punto
$\pi = [Q; W]$ un sottospazio e $P'$ la proiezione ortogonale di $P$ su $\pi$.
Allora $P'$ è il punto di $\pi$ più vicino a $P$.

**DIM**




$\forall R \in \pi$ : $\cancel{PR}$ $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RP'} + \overrightarrow{P'P}$

ma allora

$$d(R,P)^2 = \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RP} = (\overrightarrow{RP'} + \overrightarrow{P'P}) \cdot (\overrightarrow{RP'} + \overrightarrow{P'P})$$

$$= \overrightarrow{RP'} \cdot \overrightarrow{RP'} + \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP'} + 2\,\overrightarrow{RP'} \cdot \overrightarrow{PP'} = 0$$

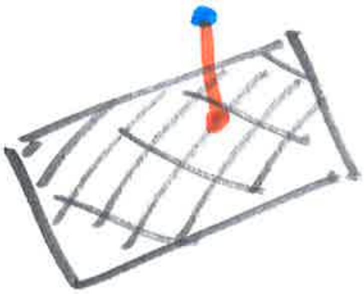
perché $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{RP'}$

=

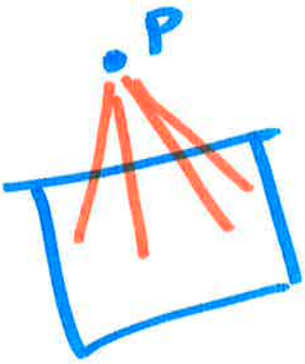
$$= \|\overrightarrow{RP'}\|^2 + \|\overrightarrow{PP'}\|^2 =$$

$$= d(R,P')^2 + d(P,P')^2 \geq d(P,P')^2$$

$$\Rightarrow \quad d(R,P) \geq d(P,P'). \qquad \square$$



DISTANZA PUNTO/SOTTOSPAZIO.




$P$ punto

$\pi$ sottospazio

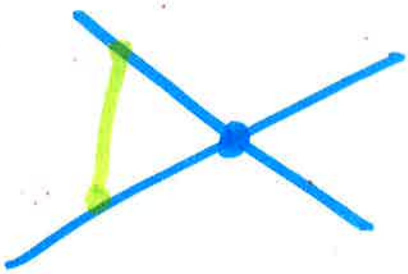
$$d(P,\pi) = \min \{ d(P,X) \mid X \in \pi \}.$$

$= d(P,P')$ ove $P'$ proiezione di $P$ su $\pi$.

$\Pi$, $\Sigma$ sottospazi

$$d(\Pi, \Sigma) = \min\{d(x,y) \mid x \in \Pi,\ y \in \Sigma\}.$$

va bene se $\Pi \cap \Sigma = \phi$.



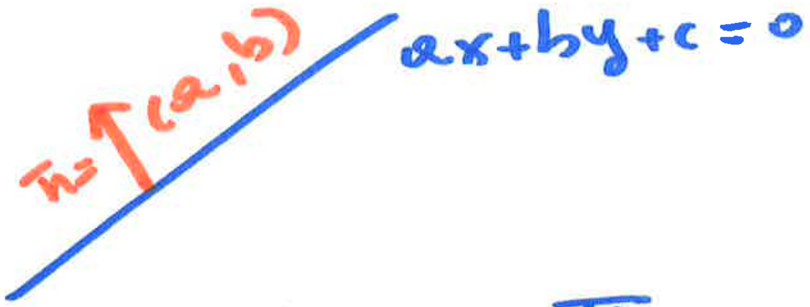
Equazione della retta nel piano rispetto un riferimento Euclideo.

$$ax+by+c=0$$

osserviamo che il sottospazio di traslazione della retta si ottiene come soluzioni di $ax+by=0$ cioè di $(a,b)\cdot(x,y)=0$

cioè $r = [P; (a,b)^{\perp}]$.

In particolare il vettore $(a,b)$ identifica la direzione normale (=ortogonale) alla retta data.

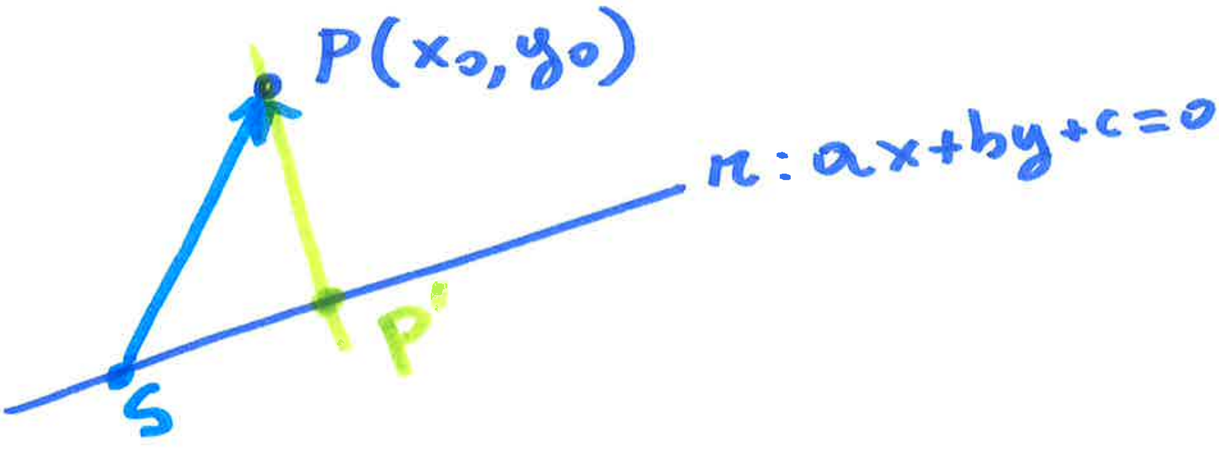



più in generale se $\Pi$ è un iperpiano in $EG(n,\mathbb{R})$ di eq.

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n+b=0$$

il vettore $(a_1 \dots a_n)$ è il vettore normale a $\Pi$ ed identifica la dir. ortogonale allo spazio di traslazione di $\Pi$.

# DISTANZA PUNTO/RETTA




Vogliamo $d(P, P')$ con $P'$ proiez. ortogonale di $P$ su $r$

Sia $S=(x_1, y_1) \in r$.

$\overrightarrow{P'P}$ è la proiezione del vettore $\overrightarrow{SP}$ nella direzione $\bar{n}$ ortogonale alla retta.

$$-\overrightarrow{PP'} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \cdot \bar{n}$$

$$\overrightarrow{SP} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

$$\bar{n} = (a, b)$$

$$((x_0 - x_1), (y_0 - y_1)) \cdot (a, b) =$$

$$= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) =$$

$$= a x_0 + b y_0 - (a x_1 + b y_1) = *$$

$$(x_1, y_1) \in r \Rightarrow a x_1 + b y_1 + c = 0$$

$$* = a x_0 + b y_0 + c$$

$$\| \overrightarrow{PP'} \| = \boxed{\frac{\|\bar{n}\|}{\|\bar{n}\|^2} \left| \overrightarrow{SP} \cdot \bar{n} \right|} =$$

$$= \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

chiaramente funziona sempre per punto/iperpiano → cambia solo il numero di componenti

# DISTANZA FRA RETTE.

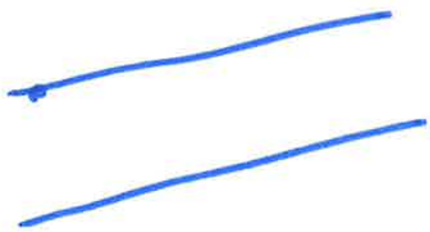
$r, s.$

vogliamo $r = s$

o $r \cap s = \phi$

Pre

$\boxed{n=2}$ piano $\quad r \cap s = \phi \iff r \parallel s.$



$r = [P; W_1]$

$s = [Q; W_1]$

$r : ax + by + c = 0$

$\forall \underline{\underline{P}}$

$s : ax + by + c' = 0$

$(x_0, y_0) \in r$

$$d(P, s) = \frac{|\overbrace{ax_0 + by_0}^{= -c} + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

la distanza non dipende dal punto P scelto.

# DISTANZA FRA (IPER)PIANI

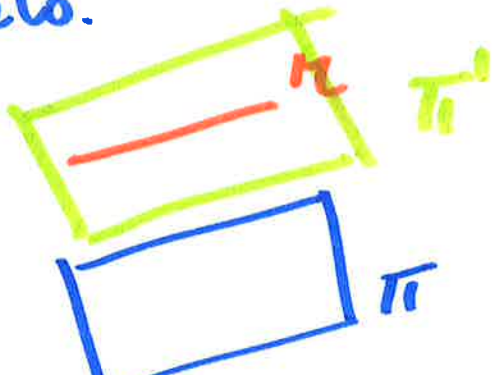
→ DEVONO ESSERE PARALLELI PER RISULTARE DISGIUNTI.

OGNI PUNTO DELL'UNO È ALLA MEDESIMA DISTANZA DALL'ALTRO.

$$\Pi : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$
$$\Sigma : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b' = 0$$

$$d(\Pi, \Sigma) = \frac{|b - b'|}{\sqrt{\sum a_i^2}}.$$

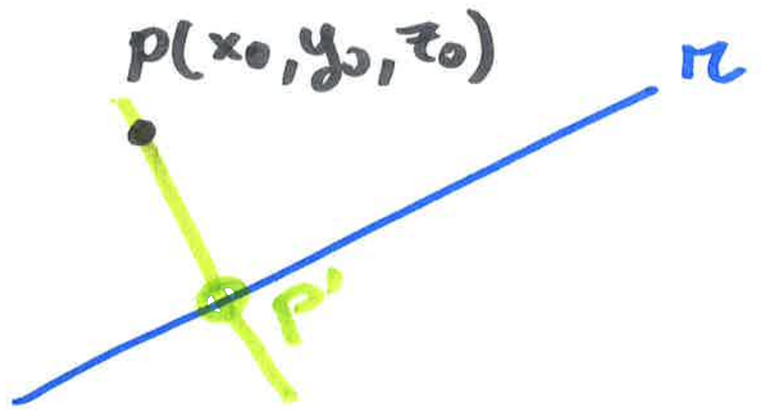
Formule analoghe per le distanza fra un iperpiano ed un sottospazio ad esso parallelo.




Infatti se $r \parallel \Pi \Rightarrow$ osserviamo che $\exists$

un iperpiano $\pi'$ con $\pi' // \pi$ ed $r \subseteq \pi'$. Tutti i punti di $\pi'$ sono alla medesima distanza da $\pi$; in particolare tutti i punti di $r$.

DISTANZA punto/retta in $EG(3, \mathbb{R})$.




DISTANZA FRA P ed il punto di $r$ PIÙ VICINO A P = distanza fra P e la proiez. ortogonale di P su $r$.

1) TROVARE IL PIANO PER P ortogonale AD $r$
2) intersecare con $r$
3) calcolare la distanza.

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$ di dir. $\bar{v}$

SAPETE CHE $\bar{v}^{\perp} = \mathcal{L}((a,b,c),(a',b',c'))$

perché $\mathcal{L}(\bar{v}) = [(a,b,c),(a',b',c')]^{\perp}$

$[(x_0, y_0, z_0) ; \mathcal{L}((a\ b\ c),(a',b',c')]$

osserviamo che $\bar{v} = (a\ b\ c) \times (a'\ b'\ c')$

prodotto vett.

il piano
~~la retta~~ per P ortogonale ad r

ha eq. $((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0)) \cdot$

$(a,b,c) \times (a',b',c') = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$