Sottospazi lineari

$[P; W]$

retta, piano, punto

$[P, \{\underline{0}\}]$

parallelismo:

$[P; U]$ e $[Q; W]$ sono paralleli $\iff U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

<u>oss</u>: Siano $[P; U]$ e $[Q; W]$ due sottospazi lineari paralleli.

$\Rightarrow$ Se $[P; U] \cap [Q; W] \neq \emptyset$ vale $[P; U] \subseteq [Q; W]$ oppure $[Q; W] \subseteq [P; U]$

Supponiamo $[P; U] \cap [Q, W] \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists z$ tale che $z \in [P; U] \cap [Q; W]$

e $[P; U] = [z; U]$ $[Q; W] = [z; W]$

e a questo punto se

$$\mathcal{U} \subseteq W \Rightarrow [P;\mathcal{U}] = [Z;\mathcal{U}] \subseteq [Z;W] = [Q;W]$$

altrimenti se $W \subseteq \mathcal{U}$

$$[Q;W] = [Z;W] \subseteq \subseteq [Z;\mathcal{U}] \subseteq [P;W].$$

$\square$

OSSERVIAMO CHE:

se $n=2$ (nel piano)

1) Dati due punti distinti $\exists!$ retta r che li contenga entrambi.

2) Data una retta r ed un punto P $\exists!$ retta s per P parallela ad r

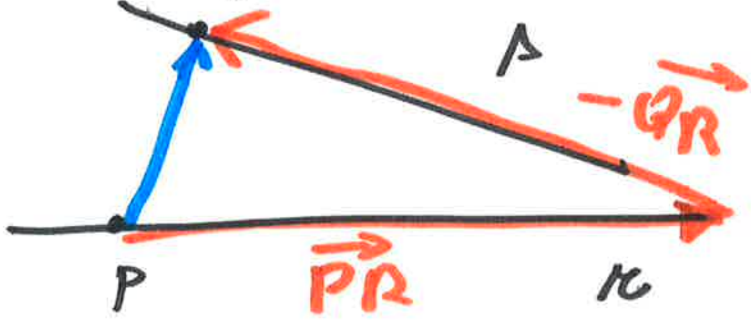
3) Due rette che non sono parallele hanno sempre un punto in comune (e viceversa rette disgiunte sono parallele)

DIM

1) Siano P, Q due punti distinti:
$\Rightarrow r_0 = [P; \mathcal{L}(\vec{PQ})]$ è una retta
per entrambi e se
$s = [X, W]$ fosse un'altra retta
per P, Q allora
$s = [P; W]$ perché $P \in s$
e $\vec{PQ} \in W$ perché $Q \in s \Rightarrow$
$\Rightarrow W = \mathcal{L}(\vec{PQ}) \Rightarrow r = s.$

2) dalla def di parallelismo

3) due rette non parallele si intersecano
sempre in un punto.
(verificato studiando il sist. lineare
associato).



$r = [P; \mathcal{U}_1]$ in $AG(2, \mathbb{K})$

$s = [Q; W_1]$

supponiamo $r \not\parallel s \Rightarrow \mathcal{U}_1 \oplus W_1 = V_2(\mathbb{K})$

$\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{U}_1 \oplus W_1 \Rightarrow \exists\ \overrightarrow{PX} \in \mathcal{U}_1$ tali che
$\overrightarrow{QY} \in W_1$

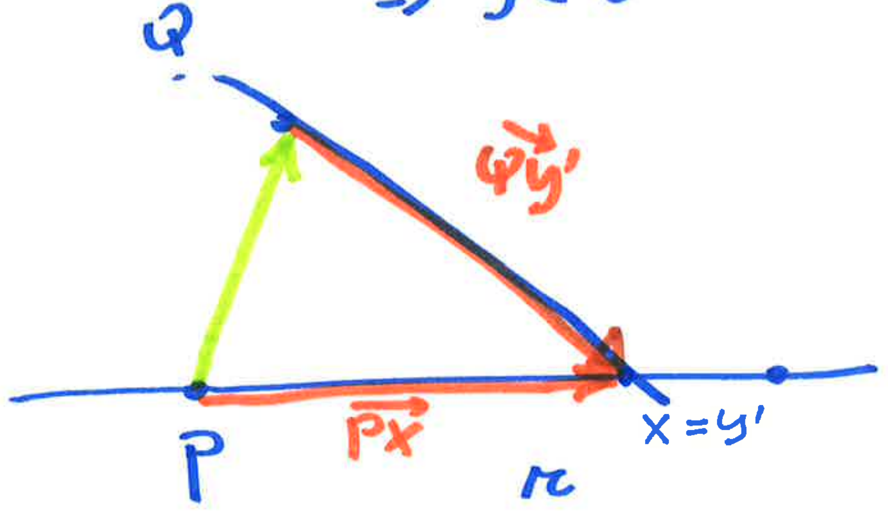
$$\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QY} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{YQ} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{YQ} =$$
$$= \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QY} =$$
$$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY'} = *$$

$Y' \in s : Y' = Q - \overrightarrow{PY}$

$= \overrightarrow{PY'} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow Y' \in r \Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$



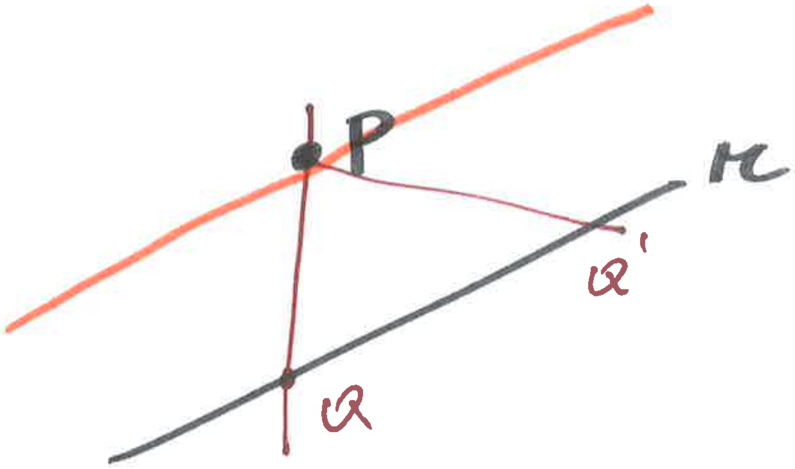
Def: si dice **fascio proprio** di rette nel piano l'insieme di tutte le rette che passano per un punto P fissato.

si dice **fascio improprio** di rette nel piano l'insieme di tutte le rette che hanno una direzione fissata (parallele fra loro).

OSS: Il numero di rette di un fascio è "∞^1" $\to$ queste rette sono una famiglia che dipende da un parametro.

Sia P un punto ed r una retta con $P \notin r$

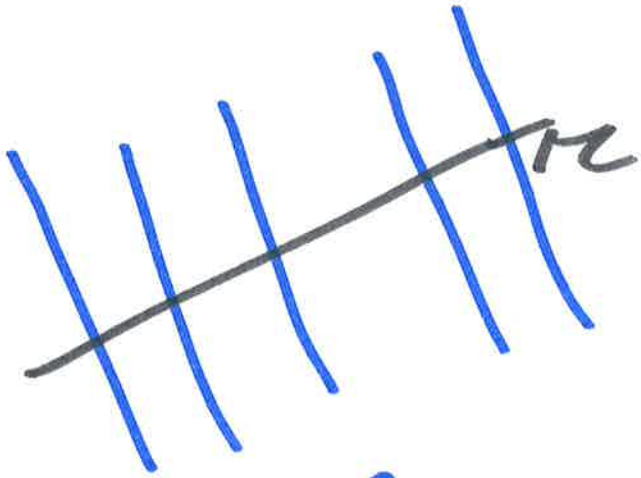
Fascio proprio



$\exists!$ retta s con $P \in s$ che è disgiunta da r; tutte le altre rette per P intersecano r in punti distinti:

le rette del fascio per P sono "$\infty^1 + 1 = \infty^1$" nel senso che escludendo la singola retta per P parallela ad r sono in biiezione con i punti di r.

Fascio improprio di direzione V_1.
Prendiamo r_0 una retta che non ha direzione V_1 ed oss. che ogni retta del fascio interseca r_0 in esattamente un punto



c'è una biiezione fra i punti di r_0 e le rette del fascio improprio.

Equazioni dei fasci di rette nel piano.

Fascio proprio.

P = centro del fascio (x_0, y_0).

la generica retta per P ha equazione del tipo

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad (*)$$

[eq. generica di una retta nel piano

$ax+by+c=0$

cond. $ax_0+by_0+c=0$

$c=-ax_0-by_0$]

con $(a,b)\neq(0,0)$.

<u>N.B</u> (*) ha ∞^2 soluzioni come sistema lineare in a e b

però eq proporzionali descrivono la stessa retta. → le rette sono

∞^2.

In generale se si vuole considerare tutte le rette una ed una sola volta $\Rightarrow$ il fascio consta della retta

$y = y_0$

unita tutte le rette del tipo $\xi(y-y_0)+(x-x_0)=0$

(ponendo $\xi = \frac{b}{a}$ per $a \neq 0$).

per un FASCIO IMPROPRIO le rette sono tutte di eq. del tipo $ax+by+k=0$ con $(-b,a)$ che genera il sott. di traslazione e $k \in \mathbb{K}$ un parametro.

$$ax+by+c=0$$

Imponiamo che (l,m) generi il sottospazio di traslazione della retta $\Rightarrow al+bm=0$

$(l,m)\neq(0,0)$ in particolare

$$(a,b)=(-m,l)$$

è soluzione.

∞^2 equazioni ma solo ∞^2 rette.

(equazioni proporzionali danno la stessa retta).

<u>OSS</u>: Siano $r: ax+by+c=0$

$s: a'x+b'y+c'=0$

due rette del piano $r\neq s$

$$\Rightarrow \alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$$

al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{\underline{0}\}$.
rappresenta la generica retta del fascio

- proprio di centro $C = r \cap s$ se r ed s non sono parallele.
- improprio di direzione uguale a quella di r (e di s) se $r \parallel s$.

- Supponiamo $r \cap s = C$ con coordinate di $C = (x_0, y_0)$.

1) ogni retta del tipo

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c') = 0 \quad (*)$$

passa per C infatti sost. (x_0, y_0) al posto di (x, y) abbiamo

$$\alpha(\underbrace{ax_0+by_0+c}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ C \in r}})+\beta(\underbrace{a'x_0+b'y_0+c'}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ C \in s.}}) = 0$$

2) Sia $P = (x_1, y_1)$ un punto diverso da C $\Rightarrow$ mostriamo che $\exists$ una retta passante per P della forma $(*)$.

Scriviamo

$$(\Delta) \quad \alpha\underbrace{(a x_1 + b y_1 + c)}_{u} + \beta\underbrace{(a' x_1 + b' y_1 + c')}_{v} = 0$$

NON PUÒ essere $(u, v) = (0, 0)$ perché se così fosse $P \in r \cap s$ $\Rightarrow$ $r \cap s$ conterrebbe 2 punti e perché $r \neq s$.

(Δ) è una eq. omogenea in 2 incognite (α, β) non banale $\Rightarrow$ ammette una classe di autosol. $\mathcal{L}((\bar{\alpha}, \bar{\beta}))$. Ognuna di queste dà la medesima retta per C e per P.

In particolare, al variare di $P \neq C$ otteniamo tutte le rette del fascio per C. $\square$

$$r /\!/ s \Rightarrow \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

$$r /\!/ s \Rightarrow rk\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = 1$$

in particolare la retta

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$$

avrà sott. di traslazione descritto dall'eq.

$$(\alpha a+\beta a')x+(\alpha b+\beta b')y=0$$

ma $rk\begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' & \alpha b+\beta b' \\ a & b \end{pmatrix} =$

$$= rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

e quindi ogni retta è parallela ad r ed s.

Inoltre da $r \neq s$ segue che le eq. $\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$ ~~danno tutte~~ rappresentano $\forall$ possibile retta del fascio improprio.

Infatti se $P=(x_1,y_1)$ è un punto, ponendo

$$\alpha\underbrace{(ax_1+by_1+c)}_{u}+\beta\underbrace{(a'x_1+b'y_1+c')}_{v}=0$$

otteniamo $(u,v)\neq(0,0)$ e quindi troviamo α e β che danno una retta per P $\square$

$n=3$: Sia $P \in AG(3, \mathbb{K})$ un punto.

Si dice stella propria di rette di centro P l'insieme di tutte le rette per P.

Stella propria di piani di centro P l'insieme di tutti i piani per P.

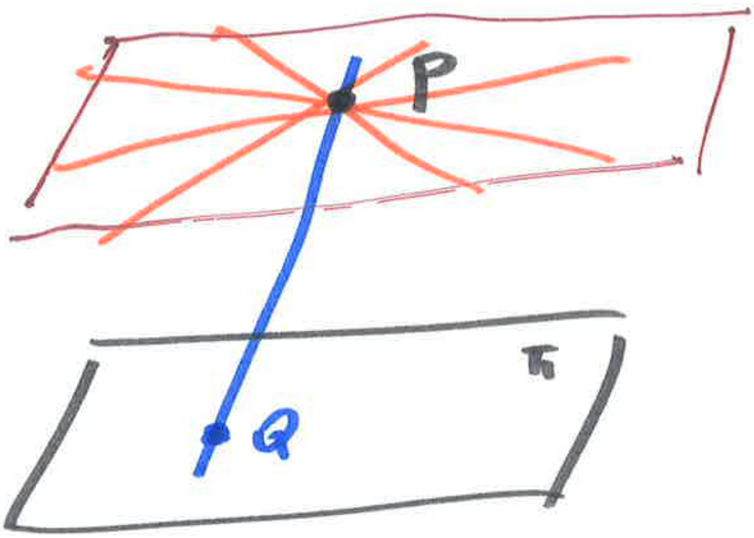
~~Sia~~ Sia (l, m, n) un vettore non nullo.

Si dice stella impropria di rette di direzione $\mathcal{L}((l, m, n))$ l'insieme di tutte le rette parallele di dir. assegnata.

Si dice stella impropria di piani ~~di dire~~ aventi direzione $\mathcal{L}((l, m, n))$ l'insieme di tutti i piani la cui giacitura contiene il vettore (l, m, n).

OSS: Gli elementi di una stella sono sempre ∞^2

$n=3$



stella propria.

P punto π piano con $P \notin \pi$.
Allora $\exists\ \infty^1$ rette per P parallele al piano π. Sono le rette del fascio di centro P contenute in π' piano $//$ a π per P
oltre a queste ∞^1 rette $\nexists$ $\forall$ punto $Q \in \pi$ $\exists!$ retta PQ della stella di centro P (in quanto un piano ed una retta ad esso non parallela si intersecano sempre in un punto).

rette totali

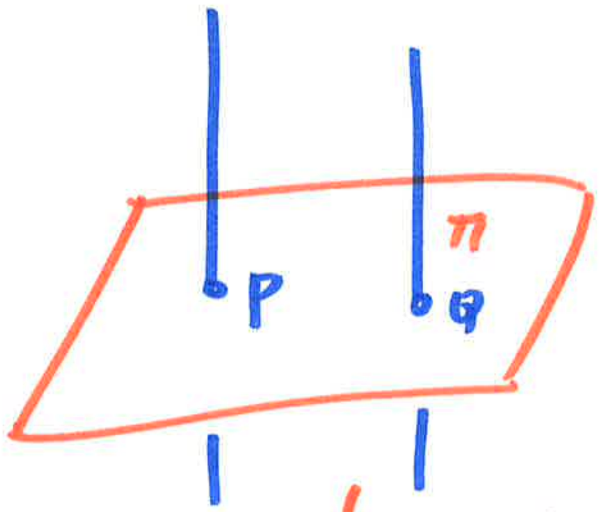
rette di un fascio $\infty^1 + 1$

+

punti di un piano ∞^2

$$\infty^2 + \infty^1 + 1 = \infty^2$$

Stella ~~[illegible]~~ impropria di direzione assegnata.



π piano la cui giacitura non contiene la direzione

$\forall$ punto di π $\exists!$ retta di dir. data che passa per esso e viceversa ogni retta di dir. data interseca π in un punto $\Rightarrow \infty^2$ rette.

Stelle di piani

$\pi: ax+by+cz+d=0$

imporre il passaggio per un punto (x_0, y_0, z_0) implica 1 eq. in 4 incognite (a, b, c, d).

$\Rightarrow \infty^3$ soluzioni ma sol. prop. danno il medesimo piano $\Rightarrow \infty^2$ piani.

imporre che la giacitura contenga un vettore non nullo (l, m, n)

$\Rightarrow al+bm+cn=0$

sis. di 1 eq. in 4 incognite (a, b, c, d)

$\Rightarrow \infty^2$ piani.

Sia r_0 una retta di $AG(3,\mathbb{K})$.
Si dice **fascio proprio** di piani di centro (supporto) r_0 l'insieme di tutti i piani che passano per r_0.

Sia $V_2 \leq V_3(\mathbb{K})$ un sottospazio 2-dimensionale di $V_3(\mathbb{K})$.
Si dice **fascio improprio** di piani l'insieme di tutti i piani la cui giacitura è V_2 (= tutti piani paralleli fra loro).

Gli elementi di un fascio sono ∞^1.

Siano
$$\pi: ax+by+cz+d=0$$
$$\sigma: a'x+b'y+c'z+d'=0$$
due piani distinti $\pi \neq \sigma$.

Se $\pi \nparallel \sigma \Rightarrow$ ogni piano del fascio proprio di supporto $\pi \cap \sigma = r_0$ ha equazione del tipo

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

e viceversa, ogni eq. di quel tipo descrive un piano del fascio, a patto che $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

Se $\pi // \sigma$ $\Rightarrow$ ogni piano del fascio di giacitura che corrisponde a quella di π ha eq. della forma

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

che in questo caso è equivalente a

$$ax+by+cz+\delta=0 \qquad \delta \in \mathbb{K}.$$

DIM: ESATTAMENTE COME PER I FASCI DI RETTE NEL PIANO

OSS: In generale una retta r nello spazio è descritta come intersezione di 2 piani che la hanno come supporto di un fascio.
Le comb. lineari delle eq. che corrispondono alla retta sono tutti (e soli) i piani

del fascio che la ha come supporto.

$$r \begin{cases} 3x+2y+5z=2 \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

$$\alpha(3x+2y+5z-2)+\beta(x-y+z-3)=0$$

<u>N.B</u> Una retta nello spazio si può scrivere in tanti modi differenti:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$\exists$ un vettore che (a meno di proporzionalità) si può associare univocamente ad una retta?

→ vettore dei determinanti di tutti i minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$.

6 elementi.

$$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a'' & b'' & d'' \\ a & b & d \\ a' & b' & d' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a'' & c'' & d'' \\ a & c & d \\ a' & c' & d' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b'' & c'' & d'' \\ b & c & d \\ b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0$$

equazioni in (a'', b'', c'', d'') i cui coeff. sono proprio dati dai det. delle matrici 2×2 estraibili dal sistema.

Fasci di piani → generati da 2 piani distinti.

Stelle di piani → si costruiscono a partire da 3 piani che siano indipendenti.

→ vi servono 3 piani che a 2 a 2 non appartengano ad un fascio.

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

con la condizione che essi non app. ad un fascio cioè

$(a''\ b''\ c''\ d'') \notin \mathcal{L}((a\ b\ c\ d),(a'\ b'\ c'\ d'))$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$$

Ogni piano della stella avrà eq. del tipo

$$\alpha(ax+\dots+d)+\beta(a'x+\dots+d')+\gamma(a''x+\dots) = 0$$

C'è un legame fra i piani "indip." e vettori linearmente indipendenti.

<u>OSS</u> di geometria affine in generale.

1) Supponiamo che $\mathbb{K}$ invece che essere $|\mathbb{K}|=\infty$ abbia un numero finito q di elementi; es. $|\mathbb{K}|=2$.

Allora le scelte di un fascio nel piano sono $|\mathbb{K}|+1=3$ per fasci propri e $|\mathbb{K}|=2$ per fasci impropri.

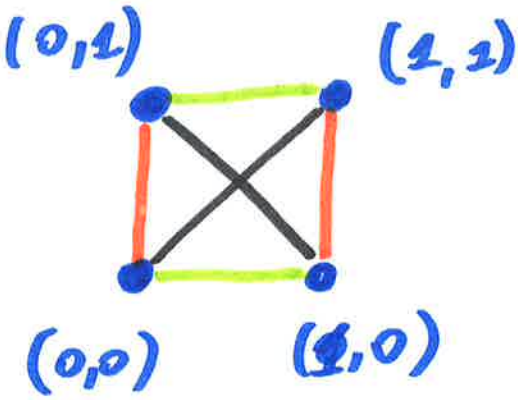
le rette di una stella sono

$$|\mathbb{K}|^2 + |\mathbb{K}| + 1 = 4 + 2 + 1$$

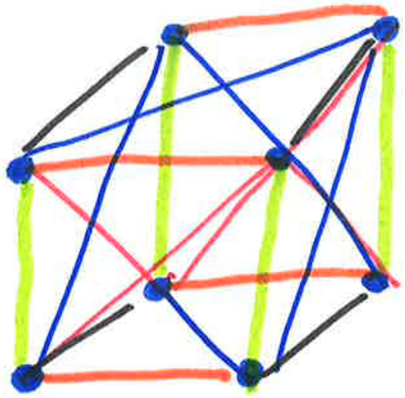
se stella propria.

$|\mathbb{K}|^2 = 4$ se stella impropria.

$|\mathbb{K}| = 2 \qquad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$



le rette del medesimo colore sono parallele.



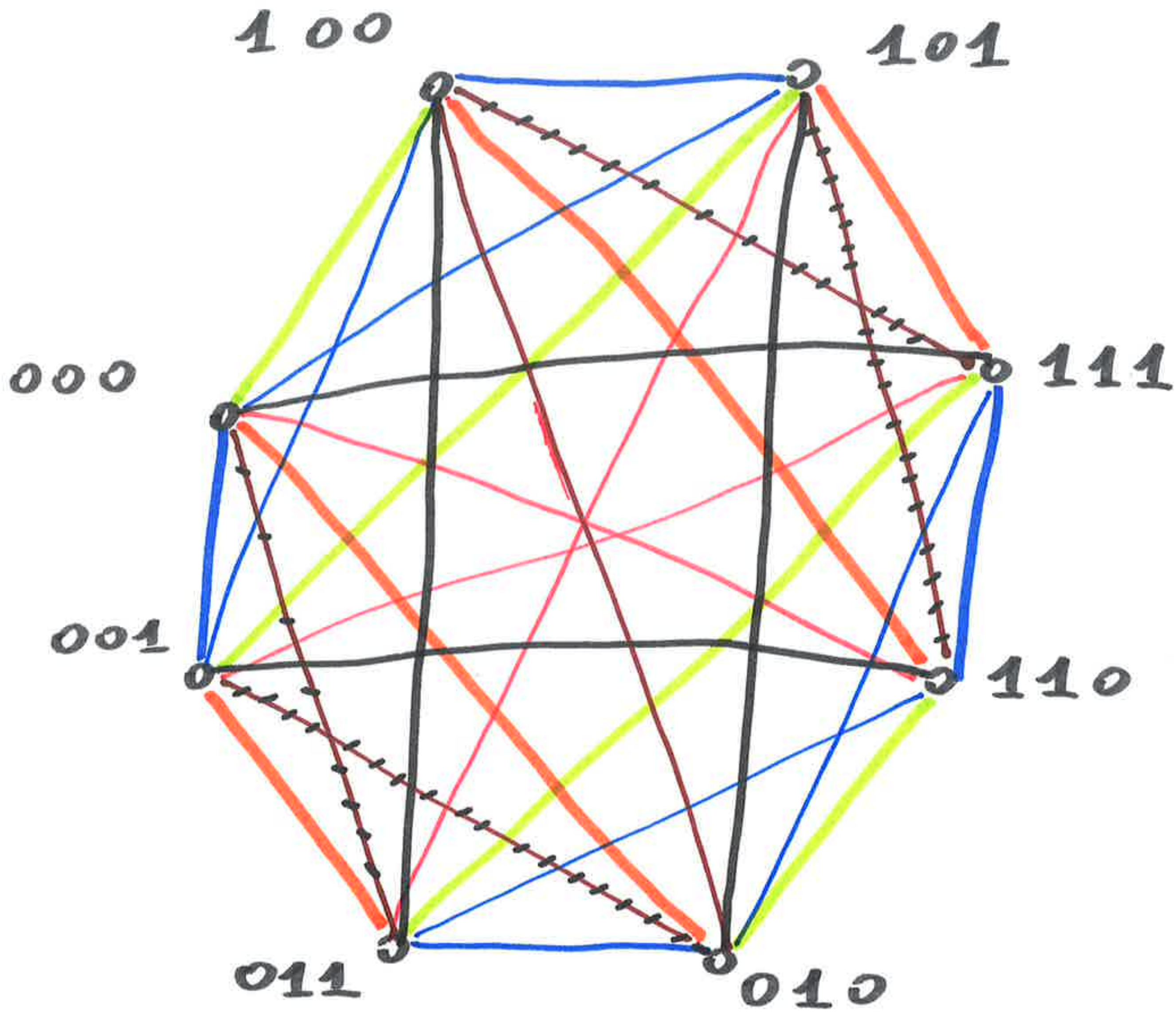
etc. etc.

avere come configurazione ogni punto "collegato" con i restanti 7 da una retta.

$AG(3, \mathbb{Z}_2)$

$2^3 = 8$ punti / ogni retta 2 punti

$|\text{fascio improprio}| = 4 + 2 + 1 = 7$



$|\text{fascio proprio}| = 4$

2) In generale in $AG(n, \mathbb{K})$ abbiamo visto la nozione di punti indipendenti geometricamente.

- Un insieme di punti

$$(x_{11} \dots x_{1n})$$
$$\vdots$$
$$(x_{k1} \dots x_{kn})$$

è geometricamente indipendente

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} k \begin{pmatrix} x_{11} \dots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} \dots & x_{kn} & 1 \end{pmatrix} = k$$

cioè il rk della matrice è massimo.

In questo caso i punti generano un sottospazio affine di dim $= k-1$

primo pto come origine + cond. che $\overrightarrow{P_1 P_i}$ al variare di $i = 2 \dots k$ siano indip.