Spazio affine

Sottospazio affine

sottospazio lineare

$\downarrow$

$[P;W]$ con $P \in A$ punto

e $W \leq V_n(\mathbb{K})$

sottospazio di traslazione.

$\dim W = 1 \Rightarrow [P;W]$ è detto retta.

3 punti P, Q, R sono allineati $\Leftrightarrow$ essi appartengono ad una medesima retta.

Se $AG(n, \mathbb{K})$ è una geometria affine di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$

e fissiamo un riferimento affine

$\Rightarrow$ $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ $\Rightarrow$ possiamo assegnare ad ogni punto le sue coordinate rispetto Γ e identificare $AG(n, \mathbb{K})$ con

$$(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, f)$$

$$f(P, Q) = Q - P$$

Oss: Se $\Gamma = (O, \mathcal{B})$
$\Gamma' = (O', \mathcal{B}')$
sono due riferimenti affini ed X = coord. di P rispetto a Γ

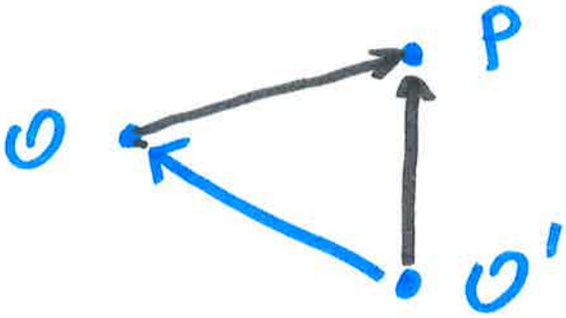
X' = coordinate di P rispetto Γ'.

$$X = (x_1 \dots x_n)$$

$$X' = (x_1' \dots x_n')$$

$$\overrightarrow{OP} = \sum x_i \overline{e}_i$$

$$\overrightarrow{O'P} = \sum x_i' \overline{e}_i'$$



$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

se $\tilde{O} = [o_1 \dots o_n]$ = coordinate di O' rispetto a Γ $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{O'P} = -\sum o_i \bar{e}_i + \sum x_i \bar{e}_i =$$

$$= \sum (x_i - o_i) \bar{e}_i$$

per ottenere le coordinate rispetto Γ' si applica un cambiamento di base.

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O'P} = (X - \tilde{O}) R$$

$${}^T X' = {}^T R\, {}^T (X - \tilde{O}).$$

Come descrivere i sottospazi di uno spazio affine.
[fissati una volta per tutte Γ e $AG(n,\mathbb{K})$].

<u>OSS</u>: Sia dato $AG(n,\mathbb{K})$ e consideriamo un sistema lineare in n incognite $AX=B$ compatibile.

$\Rightarrow S=\{P \mid AP=B\}$ soluzioni del sistema

é un sottospazio affine di $AG(n,\mathbb{K})$.

DIM: $S=S_0+\{X \mid AX=\underline{0}\}$

corrisponde al sottospazio

$[S_0;\{X \mid AX=\underline{0}\}]$

In particolare S corrisponde al sottospazio lineare che ha come origine una qualsiasi soluzione particolare del sistema e sott. di traslazione le soluzioni del sistema omogeneo associato.

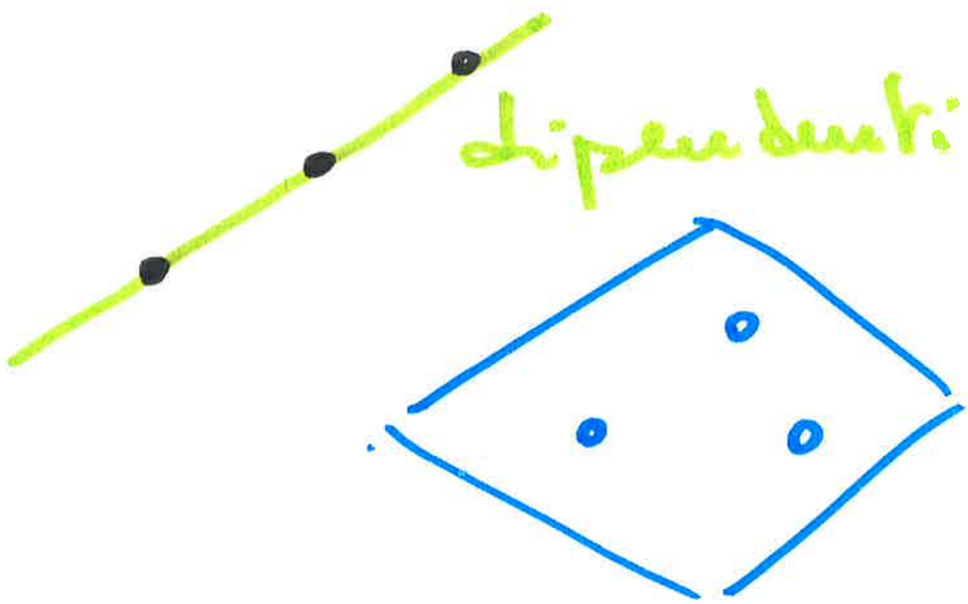
Viceversa: dato un sottospazio, come trovare un sistema che lo descrive.

Def. Siano $P_1 \dots P_k \in AG(n, \mathbb{K})$ punti. Si dice sottospazio affine generato da $P_1 \dots P_k$ il più piccolo sottospazio che contiene $P_1 \dots P_k$.

Scriveremo $\langle P_1 \dots P_k \rangle$ per tale sottospazio.

1) I punti $P_1 \dots P_k$ sono detti <u>geometricamente indipendenti</u> se $\forall i = 1 \dots k$

$$\langle \{P_1 \dots P_k\} \setminus \{P_i\} \rangle \subsetneq \langle \{P_1 \dots P_k\} \rangle$$



OSSERVIAMO CHE SE

$P_1 \dots P_k$ sono dei punti

ed π é un sott. affine che li

contiene $\Rightarrow$

1) $P_1 \in \pi$

2) $\overrightarrow{P_1P_i}$ deve appartenere al sottospazio ~~lineare~~ di tr. di π

$$\alpha = [P_1, \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_k})] \subseteq \pi$$

Viceversa $P_i = P_1 + \overrightarrow{P_1P_i} \in \alpha$

ma allora α deve essere il più piccolo sott. affine che contiene i punti $P_1 \dots P_k$

In particolare i punti $P_1 \dots P_k$ sono geometricamente indipendenti $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_k})$ é una sequenza libera di vettori. (altrimenti potremmo scartare un vettore $\overrightarrow{P_1P_i}$ da [illegible] il medesimo sott. vettoriale e dunque avremmo che

$$< P_1 \dots P_{i-1} P_i P_{i+1} \dots P_K > =$$

$$= [P_1 ; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_i} \dots \overrightarrow{P_1P_K})] =$$

$$= [P_1 ; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_{i-1}} \overrightarrow{P_1P_{i+1}} \dots \overrightarrow{P_1P_K})] =$$

$$= < P_1 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_K >.$$

e quindi i punti non sarebbero geom. indipendenti.

In particolare per generare uno spazio affine di dim. $= K$ servono $K+1$ punti geometricamente indipendenti.

Equazione di una retta per 2 punti

$$P = [p_1 \dots p_n]^t$$

$$Q = [q_1 \dots q_n]$$

$$\ell := PQ = [\, [p_1 \dots p_n], \mathcal{L}((q_1 - p_1 \dots q_n - p_n))]$$

$(x_1 \dots x_n) \in \ell \iff$

$\overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}) \iff$

$$\begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix} \right)$$

$$\iff \operatorname{rk} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & q_1 - p_1 \\ \vdots & \\ x_n - p_n & q_n - p_n \end{bmatrix} = 1$$

si ottengono $n-1$ equazioni indipendenti.

CASI PARTICOLARI

$n = 2$ $\quad P = (x_p, y_p)$

$Q = (x_q, y_q)$

$X = (x, y)$

$$\begin{vmatrix} x-x_p & x_q-x_p \\ y-y_p & y_q-y_p \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-x_p)(y_q-y_p) = (x_q-x_p)(y-y_p)$$

$$\frac{x-x_p}{x_q-x_p} = \frac{y-y_p}{y_q-y_p}$$

$n=3$

$$rk \begin{bmatrix} x-x_p & x_q-x_p \\ y-y_p & y_q-y_p \\ z-z_p & z_q-z_p \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{x-x_p}{x_q-x_p} = \frac{y-y_p}{y_q-y_p}$$

$$\frac{x-x_p}{x_q-x_p} = \frac{z-z_p}{z_q-z_p}$$

$$\frac{y-y_p}{y_q-y_p} = \frac{z-z_p}{z_q-z_p}$$

$$\frac{x-x_p}{x_q-x_p} = \frac{y-y_p}{y_q-y_p} = \frac{z-z_p}{z_q-z_p}$$

più in generale se avete un sottospazio generato dai punti $P_1\ P_2 \dots P_K$ in $AG(n, \mathbb{K})$ le equazioni sono date da

$$rk \begin{bmatrix} X_1 - P_{11} & P_{21} - P_{11} & \dots & P_{K1} - P_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n - P_{1n} & P_{2n} - P_{1n} & & P_{Kn} - P_{1n} \end{bmatrix} =$$

$$= rk \begin{bmatrix} P_{21} - P_{11} & \dots & P_{K1} - P_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{2n} - P_{1n} & \dots & P_{Kn} - P_{1n} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1X} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{P_1P_K})$$

$n=3$ $\quad P=(x_P, y_P, z_P)$

$Q=(x_Q, y_Q, z_Q)$

$R=(x_R, y_R, z_R)$

tali che $\vec{PQ}$ e $\vec{QR}$

siano indipendenti

$$rk\begin{bmatrix} Q-P \\ R-P \end{bmatrix}=2$$

$$X=(x,y,z)\in\pi=\langle P,Q,R\rangle$$

$$\iff \vec{PX}\in\mathcal{L}(\vec{PQ},\vec{PR}) \iff$$

$$\begin{vmatrix} x-x_P & x_Q-x_P & x_R-x_P \\ y-y_P & y_Q-y_P & y_R-y_P \\ z-z_P & z_Q-z_P & z_R-z_P \end{vmatrix}=0$$

$$(x-x_P)\begin{vmatrix} y_Q-y_P \\ z_Q-z_P \end{vmatrix}-(y-y_P)\begin{vmatrix} x_Q-x_P & x_R-x_P \\ z_Q-z_P & z_R-z_P \end{vmatrix}+$$

$$+(z-z_P)\begin{vmatrix} x_Q-x_P & x_R-x_P \\ y_Q-y_P & y_R-y_P \end{vmatrix}=0$$

OSS: in $n=2$

$$\begin{vmatrix} x-x_P & x_Q-x_P \\ y-y_P & y_Q-y_P \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-x_P)(y_Q-y_P)-(x_Q-x_P)(y-y_P)=0$$

un punto (x_R, y_R) è allineato con P e Q $\iff$ (x_R, y_R) soddisfano l'eq.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0$$ condizione di allineamento

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P \\ x_Q & y_Q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_Q & y_Q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_P & y_P \end{vmatrix} =$$

$$= x_P y_Q - y_P x_Q - x y_Q + y x_Q$$

$$+ x y_P - y x_P = 0$$

$n=3$

condizione di complanarità:

$$\begin{vmatrix} x-x_P & x_Q-x_P & x_R-x_P \\ y-y_P & y_Q-y_P & y_R-y_P \\ z-z_P & z_Q-z_P & z_R-z_P \end{vmatrix} = 0$$

equivalente a

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

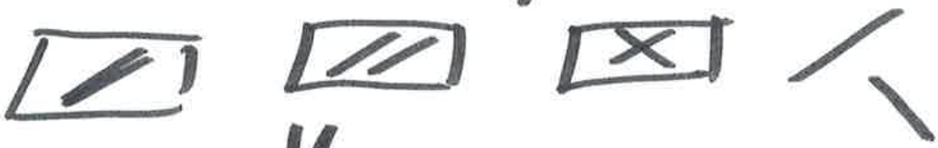
$$(x\ y\ z\ 1) \in \mathcal{L}\big((x_P\ y_P\ z_P\ 1),\ (x_Q\ y_Q\ z_Q\ 1),\ (x_R\ y_R\ z_R\ 1)\big).$$

posizioni reciproche di

rette nel piano

rette e piani nello spazio

rette nello spazio



piani nello spazio.

Due sottospazi affini sono paralleli $\Leftrightarrow$ il sottospazio di traslazione dell'uno è contenuto nel sottospazio di traslazione dell'~~altro~~ altro.

$n=2$ una retta è descritta da un'equazione

$$ax+by+c=0$$

con $(a,b)\neq(0,0)$

per studiare la pos. di 2 rette studiamo il sistema

$$\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

ed osserviamo che 2 rette sono // $\Leftrightarrow$ hanno la stessa direzione $\Leftrightarrow$ le corrispondenti eq. omogenee hanno le stesse soluzioni $\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$

- $rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$ & $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1 \Rightarrow r=s$
- $rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$ & $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2 \Rightarrow r\cap s=\phi$

$\bullet \ rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2 = rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Rightarrow$

$r \cap s = \{P\}$.

se $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$

<u>$n=3$</u> posizioni reciproche di 2 piani.

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$\sigma : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

con $(a, b, c) \neq (000) \neq (a'\ b'\ c')$.

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \quad A|B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}$

$rk\ A$	$rk(A\|B)$		
1	1	∞^2	$\pi = \sigma$
1	2	0	$\pi // \sigma$
2	2	∞^1	$\pi \cap \sigma = r$.

$\pi \cap \sigma = \emptyset$ ma le eq. omogenee sono eq.

$\Rightarrow \pi // \sigma$

Una retta r in $AG(3, \mathbb{K})$ è rappresentata dall'intersezione di 2 piani non paralleli.

↓

una retta è descritta da un sistema lineare compatibile di rango 2 e dunque ogni eq. rappresenta un piano.

ma la matrice incompleta deve avere rango $=2$ perché il sistema è compatibile.

$$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$$s \begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right]$$

B

$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
2	2	∞^1	$r = s$
		0	* $r // s$.
2	3	1	$r \cap s = \{P\}$.
3	3	0	r ed s sono sghembe
3	4		

* i sistemi omogenei associati ad r e ad s sono equiv.

$\Rightarrow$ r ed s hanno la stessa direzione

$\Rightarrow r // s,\ r \cap s \neq \phi$

$rk(A) = 3$ e $rk(A|B) = 4 \Rightarrow r \cap s = \phi$ ma $r \not\parallel s$.

Def: Si dice che 2 rette r, s sono complanari se $\exists$ un piano π tale che $r, s \subseteq \pi$.
Sono sghembe se non esiste un piano che le contiene entrambe.

Teorema: Rette parallele o incidenti sono complanari.
Date 2 rette sghembe r, s abbiamo che $\exists$ π, π' piani con $\pi // \pi'$, $\pi \cap \pi' = \phi$, $r \subseteq \pi$, $s \subseteq \pi'$!

DIM:

$r // s$ $\quad r = [P; V_1]$, $s = [Q, V_1]$ $\Rightarrow \pi = [P; V_1 + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$

chiaramente $r \subseteq \pi$ $\quad$ sia $y \in s \Rightarrow Qy \in V_1$
$\Rightarrow \overrightarrow{Py} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qy} \in V_1 + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$
$\Rightarrow y \in \pi \Rightarrow s \subseteq \pi$

$r = [P; V_1]$, $s = [P; W_1]$ $\Rightarrow \pi = [P; V_1 + W_1] \Rightarrow r \subseteq \pi$, $s \subseteq \pi$.

siano $r = [P, V_1]$

$s = [Q, W_1]$

con $V_1 \neq W_1$ e $r \cap s = \emptyset$

$\Rightarrow$ osserviamo che se $\exists$ un piano

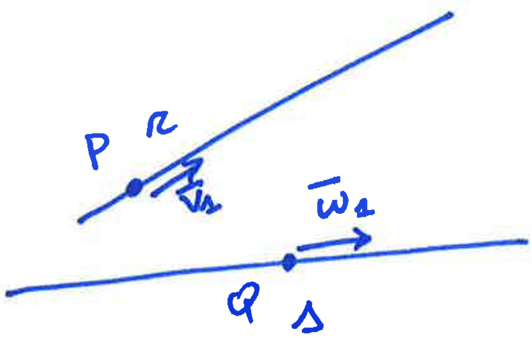
che contiene sia r che s.

questo piano dovrebbe contenere nel suo sott. lineare

$V_1, W_1, \vec{PQ}$.

In particolare $\vec{PQ} \in V_1 \oplus W_1$ perché

$V_1 \neq W_1$. $\Rightarrow$ $\nexists$



in particolare sia $\vec{QR}$ il vettore di

W_1 tale che

$$\vec{PQ} + \vec{QR} \in V_1$$

$\Rightarrow$ $\vec{PR} \in V_1$ $\Rightarrow$ $R \in r$

ma $R \in s$ $\Rightarrow$ $r \cap s \neq \emptyset$

$r = [P; U_1]$ in $AG(2,\mathbb{K})$

$s = [Q; W_1]$

supponiamo $r \not\parallel s \Rightarrow U_1 \oplus W_1 = V_2(\mathbb{K})$

$\overrightarrow{PQ} \in U_1 \oplus W_1 \Rightarrow \exists\ \overrightarrow{PX} \in U_1$, $\overrightarrow{QY} \in W_1$ tali che

$$\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QY} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{YQ} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{YQ} =$$

$$= \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QY} =$$

$$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QY'} = *$$

$Y' \in s$: $Y' = Q - \overrightarrow{PY}$

$= \overrightarrow{PY'} \in U$

$\Rightarrow Y' \in r \Rightarrow r \cap s \neq \emptyset$