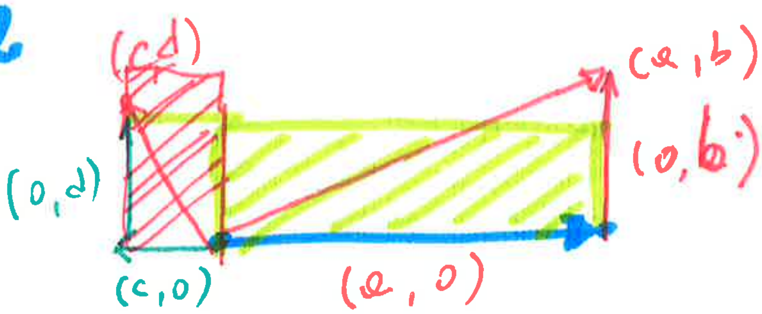
# Determinanti (e prodotto vettoriale).

Supponiamo di essere in $V_n^o(\mathbb{R})$ e di aver fissato una ~~prat~~ base ortonormale. (es. base canonica in $\mathbb{R}^n$)

$n = 2$




$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ a cosa corrisponde geometricamente?

$= ad - bc$ corrisponde all'area del parallelogramma definito dai vettori $(a,b)$ e $(c,d)$ a meno del segno.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

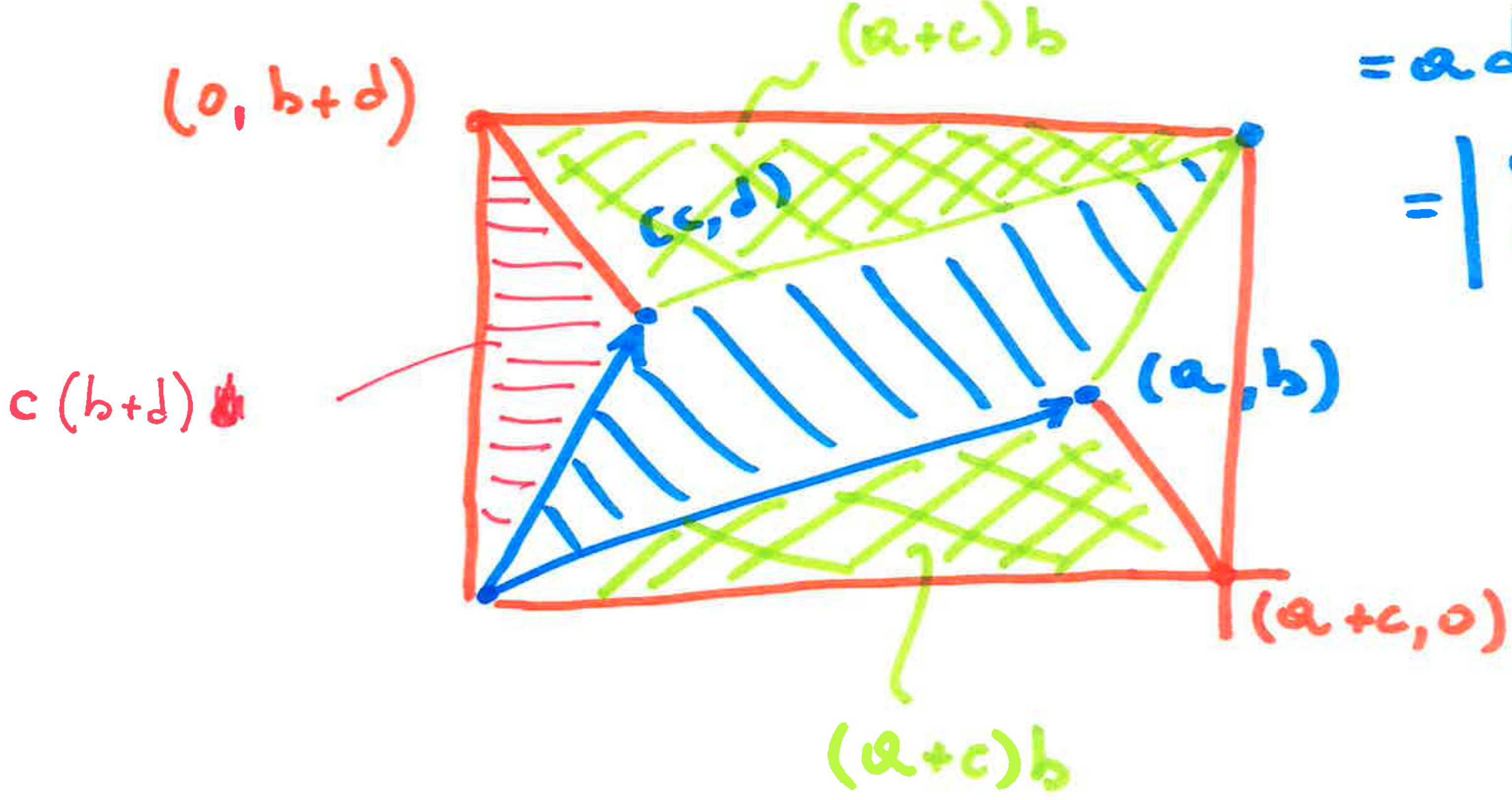
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

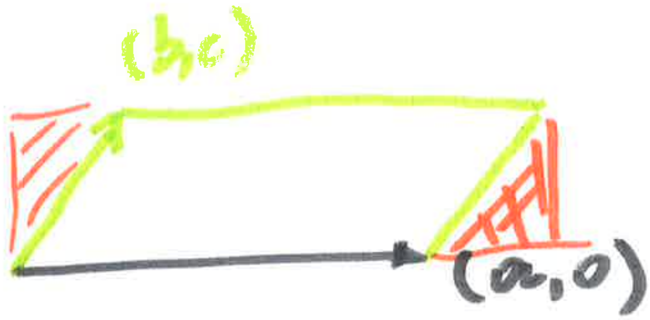
$$\text{AREA} = (a+c)(b+d) - (a+c)\cdot b - (b+d)c =$$

$$= \cancel{ab} + ad + \cancel{cb} + \cancel{cd} - \cancel{ab} - bc - \cancel{bc} - \cancel{dc} =$$

$$= ad - bc =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



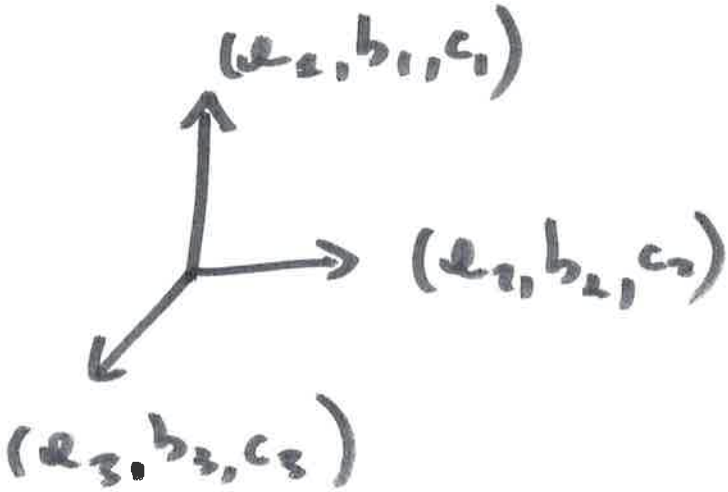



$$\text{AREA} = \cancel{ac + 2\tfrac{bc}{2}} = \qquad \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= \cancel{ac}$$

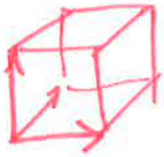
$$(a+b)c - bc = ac = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$$

$n = 3$




$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$ "volume" (con segno) del prisma determinato dai 3 vettori.

(1 0 0)
(0 1 0)
(0 0 1)



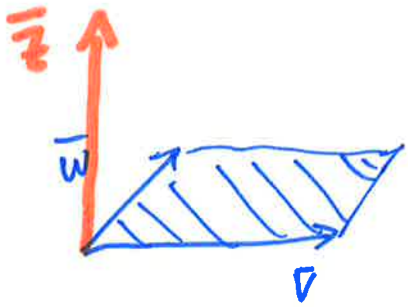
# prodotto vettoriale

$n=3$ $V_3^0(\mathbb{R})$

per ogni coppia di vettori $\bar{v}, \bar{w}$

definiamo $\bar{v} \times \bar{w} := \bar{u}$ tale che

$(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{z} =$ volume del solido determinato dai 3 vettori $\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$ $\forall \bar{z} \in V_3^0(\mathbb{R})$




In generale è "area del parallelogramma determinato da $\bar{v}$ e $\bar{w}$" per componente di $\bar{z}$ ortogonale allo spazio generato da $\bar{v}$ e $\bar{w}$.

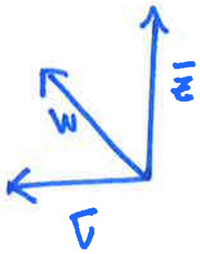
$\bar{v} \times \bar{w}$ è un vettore ortogonale a $\bar{v}$ ed a $\bar{w}$

e tale che ~~il suo~~ la cui norma sia

$\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \cdot \sin \widehat{vw}$ ove

$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ e il cos. dell'angolo fra $\bar v$ e $\bar w$ è $\dfrac{\bar v \cdot \bar w}{\|\bar v\| \cdot \|\bar w\|}$.

il verso di $\bar z$ è dato dalla "regola della mano dx"




Metodo in coordinate per calcolare

$\bar u \times \bar v$

sia $\bar u = u_1 \bar e_1 + u_2 \bar e_2 + u_3 \bar e_3$

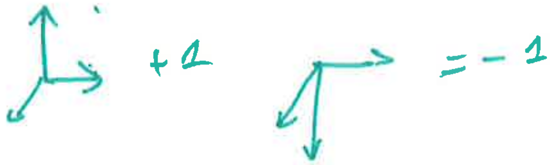
$V = v_1 \bar e_1 + v_2 \bar e_2 + v_3 \bar e_3$

$$\bar z = \bar u \times \bar v = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar e_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \bar e_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \bar e_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$(l, m, n) \cdot \bar z = l \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l & m & n \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$




---

**Geometria**

punti e rette

punti e sottospazi.

**Def**: Si dice spazio affine una struttura algebrica

$$(A, V_n(\mathbb{K}), f)$$

ove $A$ è un insieme (insieme dei punti)

$V_n(\mathbb{K})$ è uno spazio vett. di dimensione $n$ su di un campo $\mathbb{K}$.

$$f : A \times A \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$$

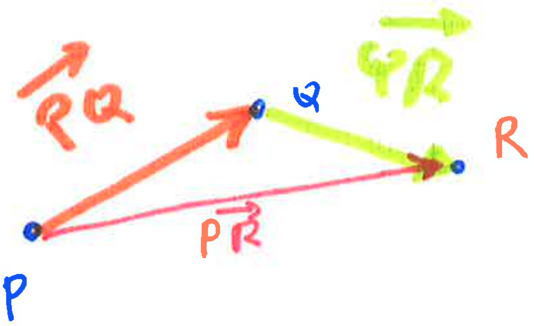
è una funzione che associa ad ogni coppia di punti un vettore tale che

1) $\forall P \in A \ \forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists! Q \in A$ tale che $f(P,Q) = \bar{v}$

[Q è detto traslato di P secondo il vettore $\bar{v}$]

scriveremo anche $\overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

2) $\forall P, Q, R \in A$ : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$




OSS $|A| = |V_n(\mathbb{R})|$

la funzione che fissato P : $A \to V_n(\mathbb{R})$ associa a Q il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve essere biiettiva!

**Def:** Si dice riferimento affine
$\Gamma = (P, \mathcal{B})$ ove
$P \in A$ e $\mathcal{B}$ è una base di
$V_n(\mathbb{K})$.
P è detto origine del riferimento.

Teorema: Sia $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ uno spazio affine $\Gamma = (P, \mathcal{B})$ un riferimento affine fissato.
Allora la funzione
$$\theta : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
ed associa ad ogni punto $Q \in A$ le componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\overrightarrow{PQ}$ è una biezione ed inoltre $\forall R, S \in A$ il vettore $\overrightarrow{RS}$ ha componenti rispetto

a $\mathcal{B}$ data da $\theta(S) - \theta(R)$.

Tale funzione é detta <u>coordinatizzazione</u> rispetto $\Gamma$

<u>DIM</u>: OSSERVIAMO CHE $\mathcal{B}$ base di $V_n(\mathbb{K})$ e sia $Q \in A$.

Allora il vettore $\overrightarrow{PQ}$ é univocamente determinato perché $f: A \times A \to V$ é una funzione e dunque avrá componenti rispetto a $\mathcal{B}$ univocamente determinate

$\Rightarrow \theta$ é una funzione.

Supponiamo ora $\theta(R) = \theta(S)$

$\Rightarrow$ ~~PQ~~ $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$

mostriamo che questo implica ~~...~~ $R = S$

Infatti abbiamo che dalle condizioni date

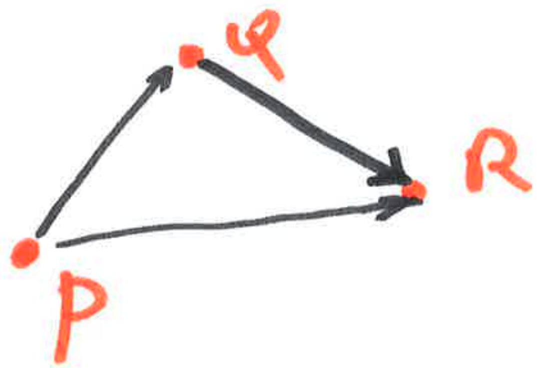
$R$ è il punto traslato di $P$ con $\vec{PR}$

$S$ è il punto traslato di $P$ con $\vec{PS} = \vec{PR}$

$\Rightarrow$ per l'assioma 1 $R = S$.

$$\theta : A \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

è una <u>biiezione</u>.



Vogliamo scoprire le componenti di $\vec{QR} = \vec{QP} + \vec{PR}$

$\vec{PR}$ ha componenti $\theta(R)$

osserviamo che $\vec{QP} + \vec{PQ} = \vec{QQ}$

ma $\vec{QQ} + \vec{QQ} = \vec{QQ}$

$\Rightarrow \vec{QQ} = \underline{0} \quad \forall Q.$

ne segue $\vec{QP} = -\vec{PQ}$

e dunque le componenti di $\vec{QP}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono

$-\Theta(Q) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{QR}$ ha componenti $\Theta(R) - \Theta(Q)$

$\square$

NOTAZIONE:

Sia $P \in A$ ; $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$

scriverò $\boxed{Q = P + \bar{v}}$ $= \tau_v(P)$

per indicare il punto traslato di $P$ secondo il vettore $\bar{v}$.

motivazione $\quad \Theta(Q) = \Theta(P) + (v_1 \dots v_n)$

coordinate $\qquad$ componenti

OSS: $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Def: Sottospazio affine.

Dato $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ sp. affine.

$A' \subseteq A$ tale che $\exists\, W \leq V_n(\mathbb{K})$

con $(A', W, f_{|A' \times A'} : A' \times A' \to W)$

spazio affine.

sottospazio lineare:

$[P; W] = \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \}$.

Teorema: I sottospazi affini di $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ sono tutti e soli i suoi sottospazi lineari.

DIM Sia $[P;W]$ un sottospazio lineare.

Allora esso è un sottospazio affine.

ove $A' = \{P+\bar{w} \mid \bar{w}, W\}$.

il sott. vettoriale considerato è $W$ e

$f$ viene ristretta ad $A' \times A'$.

$$\left([P;W];\ W,\ f_{[P;W]\times[P;W]}\right).$$

Infatti $\forall\ Q \in [P;W]$ esiste un unico

$\bar{w} \in W$ tale che $f(P,Q) = \bar{w} \in W$.

Inoltre se $R, S \in [P;W] \Rightarrow$

$$\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PS} \in W \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR} \in W,\ \overrightarrow{PS} \in W \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS} \in W \qquad \square$$

Sia $A'$ un sottospazio affine di $(A, V, f)$

$\Rightarrow \exists\ W$ tale che $W \leq V_n(\mathbb{K})$ e per ogni

$P, Q \in A'$ $\quad \overrightarrow{PQ} \in W$.

ASSERISCO $A' = [P;W]$.

Infatti $[P;W] \subseteq A'$ perché $[P;W]$ consta di

tutti i traslati di $P$ con vettori di $W$

inoltre se $Q \in A' \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

$\Rightarrow Q \in [P;W] \Rightarrow A' \subseteq [P;W]$ $\square$

<u>OSS</u>: Sia $[P;W]$ un sottospazio lineare.

$P$ è detto origine di $[P;W]$ e

$W$ è detto sottospazio di traslazione di $[P;W]$

$\Rightarrow \forall Q \in [P;W]$ abbiamo $[Q;W] = [P;W]$

(non conta quale punto si prende come origine).

<u>Dim</u>: Se $Q \in [P;W] \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$.

Sia $R \in [P,W] \Rightarrow \overrightarrow{PR} \in W \Rightarrow \overrightarrow{RP} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{RQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{QR} \in W$

$\Rightarrow R \in [Q;W]$

Viceversa: $R \in [Q;W] \Rightarrow \overrightarrow{QR} \in W \Rightarrow$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \in W \Rightarrow R \in [P;W]$

$\square$

<u>Def</u>: Si dice dimensione di un sottospazio lineare $[P;W]$ la dimensione di $W$.

In particolare la dimensione di uno spazio affine $(A, V_n(\mathbb{K}), f)$ è $n = \dim V_n(\mathbb{K})$.

| dimensione | nome | |
|---|---|---|
| 0 | punti | $[P;\{\underline{0}\}]$ |
| 1 | rette | |
| 2 | piani | |
| 3 | solidi | |
| $n-1$ | iperpiani | |

Abbiamo parlato di sottospazi lineari in generale.

→ fissiamo un riferimento affine.

→ cerchiamo le coordinate dei punti di un sottospazio lineare.

$$[P;W]=\{Q=P+\bar{w} \mid \bar{w}\in W\}.$$

$$\theta(P)=[p_1 \dots p_n]$$

$W=\mathcal{L}(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k)$ ove $\bar{w}_i$ ha componenti $(w_{i1} \dots w_{in})$.

$$\{\theta(Q)=[p_1 \dots p_n]+\tilde{u} \mid \tilde{u}\in\mathcal{L}((w_{11} \dots w_{1n}) \dots (w_{k1} \dots w_{kn}))\}.$$

$$=(p_1 \text{ --- } p_n)+\mathcal{L}((w_{11} \dots w_{1n}) \dots (w_{k1} \dots w_{kn})).=$$

$$= \{ (p_1 \ldots p_n) + \alpha_1 (w_{11} \ldots w_{1n}) + \ldots + \alpha_k (w_{k1} \ldots w_{kn}) \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \}.$$

CONSEGUENZA.

OGNI SOTTOSPAZIO AFFINE CORRISPONDE (in coordinate) ALL'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE (COMPATIBILE) E, VICEVERSA, OGNI ~~SOT~~ INSIEME DI SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE COMPATIBILE SI RAPPRESENTA COME UN SOTTOSPAZIO AFFINE.

In particolare: Sia

$$AX = B$$

un sistema lineare compatibile.

Sappiamo che le soluzioni di $AX=B$ si scrivono tutte come $X_0 + Z$ con

$$X_0 = \text{soluzione particolare}$$

$$Z \in \{W \mid AW = \underline{0}\} = \operatorname{Ker}(A).$$

$\Rightarrow$ esse corrispondono allo sottospazio ~~spazio~~ affine

$$[X_0 ; \operatorname{Ker}(A)]$$

di $\mathbb{K}^n$ ove $n$ = numero di incognite.

In altre parole il sottospazio affine che ha come origine una soluzione particolare del sistema e come sott. di traslazione il sott. delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

**Def:** Due sottospazi lineari

$[P;U]$ e $[Q;W]$

si dicono <u>paralleli</u> se $U \leq W$ oppure

$W \leq U$.

In particolare se $\dim U = \dim W \Rightarrow$

$[P;U] \parallel [Q;W] \Leftrightarrow U = W$.

Il sottospazio di traslazione di una retta è detto <u>direzione</u> della retta; il sottospazio di traslazione di un piano è detto <u>giacitura</u> di un piano.

**Teorema:** in uno spazio affine $AG(2,\mathbb{K})$ di dimensione 2 sul campo $\mathbb{K}$ due rette sono disgiunte $\Leftrightarrow$ sono parallele e distinte

**DIM:** Due rette sono 2 sott. affini di dim 1

$\Rightarrow$ sono rappresentate ciascuna da $1 = 2-1$ equazione lineare

$$(*) \begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

DISGIUNTE $\Rightarrow$ $(*)$ incompatibile.

$$1 = rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

In particolare se le rette sono disgiunte

$\Rightarrow$ $ax+by=0$ e $a'x+b'y=0$

hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow$ le rette hanno la stessa direzione e sono parallele.

se 2 rette sono parallele e distinte $\Rightarrow$

$$rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{(parallele).}$$

ma le 2 eq. non devono essere equivalenti

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

□