$V_n^0(\mathbb{R})$ s. vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

$$\forall \bar{v}: \quad \bar{v}\cdot\bar{v} \geq 0 \quad e \quad \bar{v}\cdot\bar{v}=0 \Leftrightarrow \bar{v}=\underline{0}$$

1) un prodotto di questo tipo è non degenere.

$$\forall X \subseteq V_n^0(\mathbb{R}): \quad X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$$

$$\dim(X^{\perp}) = n - \dim \mathcal{L}(X)$$

2) Data una base $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n^0(\mathbb{R})$ è sempre possibile trovare una base ortonormale di $V_n^0(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{B}'=(\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ tale che $\quad \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j' = \delta_{ij}$

- Si applica Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale di $V_n^0(\mathbb{R})$ con le proprietà che $\mathcal{B}''=(\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$ e

$$\mathcal{L}(\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_j'') = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_j)$$

e poi si divide ogni vettore di $\mathcal{B}''$ per la sua norma $\sqrt{\bar{e}_j'' \cdot \bar{e}_j''}$.

per passare da un vettore $\bar{v} \neq \underline{0}$ ad un vettore di norma $= 1$ proporzionale a $\bar{v}$ bisogna dividere per $\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$.

Un vettore di $V_n^0(\mathbb{R})$ con norma $= 1$ è detto <u>versore</u>.

In generale ogni sottospazio di $V_n^0(\mathbb{R})$ di dimensione $= 1$ contiene 2 versori che differiscono a meno di un fattore ± 1.

per poter normalizzare ci serve che $\bar{v} \cdot \bar{v}$ sia un quadrato!!

Teorema della base spettrale.

Una matrice reale A è ortogonalmente diagonalizzabile $\iff A = {}^{T}A$.

<u>DIM</u>: ort. diag. $\Rightarrow A = {}^{T}A$

$\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che

$$P^{-1} = P^{T} \ \& \ P^{-1}AP = D$$

$$D = {}^{T}D = {}^{T}(P^{-1}AP) = {}^{T}P\,{}^{T}A\,{}^{T}P^{-1} = {}^{T}P\,{}^{T}A\,P$$

e dunque $A = {}^{T}A$.

${}^{T}A = A \Rightarrow$ ort. diag.

Si procede per induzione su n = ordine di A.

- $n = 1 \Rightarrow A$ è simmetrica e ort. diag. (è già diagonale) o

- $(n-1) \Rightarrow n$

$Spec_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ esiste almeno un autovalore reale λ di A.

$\Rightarrow \exists$ anche un autovettore $X \neq \underline{0}$ tale che $AX = \lambda X$ e ${}^{T}XX = 1$

considero $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard

$${}^{T}(x_1 \dots x_n) \cdot {}^{T}(y_1 \dots y_n) = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

costruiamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ completando il vettore (X) a base.

1) completo X a base $(X, X'_1 \dots X'_{n-1})$

2) orto(normalizzo) $\longrightarrow (X, X_1 \dots X_{n-1})$

base ortonormale.

P = matrice che ha come colonne i vettori della base.

CALCOLO

$${}^{T}PAP = \begin{bmatrix} {}^{T}X \\ {}^{T}X_1 \\ \vdots \\ {}^{T}X_{n-1} \end{bmatrix} A \left[X \, X_1 \dots X_{n-1}\right]$$

$=$

$$
= \begin{bmatrix}
{}^{T}X\overbrace{AX}^{=\lambda X} & {}^{T}XAX_1 & \dots & \overbrace{{}^{T}XA}^{={}^{T}(AX)=\lambda {}^{T}X}X_{n-1} \\
{}^{T}X_1AX & & & \vdots \\
\vdots & & & \\
{}^{T}X_{n-1}AX & \dots & & {}^{T}X_{n-1}AX_{n-1}
\end{bmatrix} =
$$

in quanto $A = {}^{T}A$

$$
= \begin{bmatrix}
\lambda {}^{T}XX & \lambda {}^{T}XX_1 \dots \lambda {}^{T}XX_{n-1} \\
\lambda {}^{T}X_1X & \\
\vdots & B \\
\lambda {}^{T}X_{n-1}X &
\end{bmatrix} =
$$

gli elementi $(X, X_1 \dots X_{n-1})$ sono un sistema ortonormale

$\Rightarrow {}^{T}XX = 1$

${}^{T}XX_i = 0 \quad i \geq 1$

${}^{T}X_iX = 0 \quad i \geq 1$

$$
= \begin{bmatrix}
\lambda & 0 \; 0 \dots 0 \\
0 & \\
0 & \\
\vdots & B \\
0 &
\end{bmatrix}
$$

OSSERVIAMO CHE

B è simmetrica

infatti

$${}^{T}({}^{T}PAP) = {}^{T}P\,{}^{T}AP = $$
$$= {}^{T}PAP$$

possiamo applicare l'ipotesi

induttiva visto che

$$B = {}^{T}B \text{ e } B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$$

$\Rightarrow \exists\, Q \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ con ${}^{T}Q = Q^{-1}$

tale che $Q^{-1} B Q = {}^{T}Q B Q = D_1$

pongo $Q' := \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n,n}$

ed osservo che ${}^{T}Q' = Q'^{-1}$

perché ${}^{T}Q'Q' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^{T}Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^{T}QQ \end{array}\right] = I$$

se calcolo $(PQ')^{T} A (PQ')$ ottengo

$$ {}^T(PQ')A(PQ) = {}^TQ'({}^TPAP)Q = $$

$$ = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^TQ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = $$

$$ = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^TQBQ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & D_1 \end{array}\right] $$

Inoltre $\quad {}^T(PQ')(PQ') = {}^TQ'\,{}^TPPQ' =$

$$ = {}^TQ' I Q' = {}^TQ'Q' = I $$

quindi (PQ') é una matrice ortogonale

e $\quad (PQ')^{-1}A(PQ') = {}^T(PQ')A(PQ') = D$

matrice diagonale $\Rightarrow$ A é ortogonalmente diagonalizzabile $\square$

Sia A una matrice reale e simmetrica che rappresenta un prodotto scalare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto cui la matrice del prodotto indotto da A è ~~ortogo~~ diagonale e nella diagonale ci sono esattamente gli autovalori di A.

$${}^{T}PAP \qquad P^{-1}AP$$

Sia ~~A~~ D la matrice diag. simile ad A che rappresenta lo stesso prodotto scalare di A rispetto $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1'\cdot\bar{e}_1' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \bar{e}_n'\cdot\bar{e}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix}$$

$\delta_i \in Spec(A)$.

OSSERVIAMO CHE se prendiamo

$\mathcal{B}'' = (\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$ con

$\cancel{\bar{e}_i'' = \bar{e}_i'}$

$$\bar{e}_i'' = \begin{cases} \bar{e}_i' & \text{se } \bar{e}_i'\cdot\bar{e}_i' = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{|\bar{e}_i'\cdot\bar{e}_i'|}}\,\bar{e}_i' & \text{se } \bar{e}_i'\cdot\bar{e}_i' \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare originario si rappresenta rispetto la base $\mathcal{B}''$ con una matrice diagonale le cui entrate sono tutte

0, $+1$ o -1

Def: Si dice segnatura di un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ indotto da A la terna (a_{-1}, a_0, a_{+1})

dove $a_{-1} = |\{\lambda \in \operatorname{Spec} A \mid \lambda < 0\}|$

$a_0 = |\{\lambda \in \operatorname{Spec} A \mid \lambda = 0\}|$

$a_1 = |\{\lambda \in \operatorname{Spec} A \mid \lambda > 0\}|$.

multiinsiemi

A meno di cambiamenti di base un prodotto scalare è identificato dalla sua segnatura ed equivalente a quello rapp. da una matrice diagonale con

a_{-1} entrate $= -1$
a_0 entrate $= 0$
a_{+1} entrate $= +1$

prodotto scalare definito positivo

$(0, 0, n)$ segnatura.

prodotto scalare positivo (ma non definito;

cioè $\exists \bar{x} \in V : \bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ con $\bar{x} \neq \underline{0}$)

$(0, t, n-t)$

$$\bar{e}_i'' \cdot \bar{e}_i'' = \frac{1}{\sqrt{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|}} \bar{e}_i' \frac{1}{\sqrt{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|}} \bar{e}_i' =$$

$$= \frac{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}{\left(\sqrt{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|}\right)^2} = \frac{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|} \in \pm 1$$

ha lo stesso segno di k_i

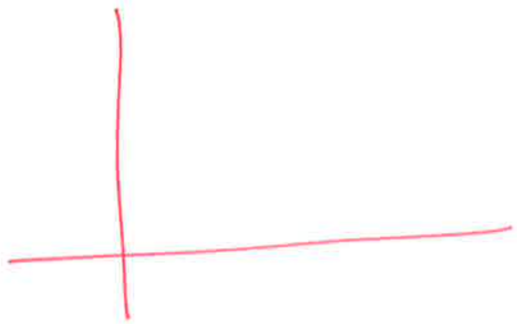
Applicazione dei prodotti scalari euclidei:

$$AX = B$$

sistema lineare

Ammette soluzione $\iff rk(A) = rk(A|B)$

Vogliamo poter considerare anche alcuni sistemi lineari "approssimati".



pb. fisico per cui dovete trovare la retta che passa per un fissato insieme di punti.

Vi vengono dati punti (x_i, y_i) nel piano.

cercate a, b tali che $ax + by + c = 0$

abbia come soluzioni x_i, y_i

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c = 0 \\ \vdots \\ a x_i + b y_i + c = 0 \end{cases}$$

e cercare (a, b, c)

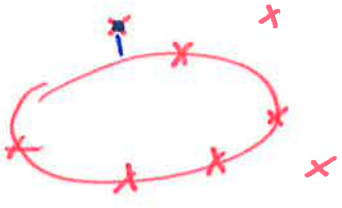
$$a x + b y + c = 0$$

$$\alpha(a x + b y + c) = 0$$

$(0,0)$, $(1\ 1)$, $(2,1)$

$$y = a x + b \qquad \begin{cases} a x_1 + b = y_1 \\ a x_2 + b = y_2 \\ a x_3 + b = y_3 \end{cases}$$

$$x^2 + a x y + b x + c y^2 + d y + e = 0$$

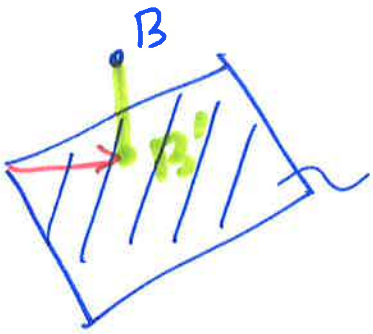


Idea: Sostituire al sistema originario un sistema che sia <u>compatibile</u> e <u>"vicino"</u>.

$AX=B$ non compatibile e studiare

$AX=B'$ con B' tale che

1) il sistema sia compatibile
2) $\|B-B'\|$ sia la più piccola possibile.



insieme di tutti i vettori W per cui $AX=W$ è compatibile

$\Rightarrow$ copertura lineare delle colonne di A

B' per minimizzare $\|B-B'\|$ sotto la condizione che $B' \in \mathcal{L}$(colonne di A).

deve essere la proiezione ortogonale di B nello sp. vettoriale delle colonne di A

$$B' = AX \quad \Rightarrow \quad (B' - B) \perp \mathcal{L}_c(A)$$

$(AX - B)$ deve essere ortog. rispetto prod. scal. standard alle colonne di A.

$$\Rightarrow {}^{T}\!A\,(AX - B) = \underline{0}$$

prodotto scalare per tutte le colonne di A

$$({}^{T}\!A A)\,X = {}^{T}\!A B$$

(sistema di minimi quadrati associato a quello di partenza)