X

$X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X) + \mathrm{Rad}(f)$

Idea è scrivere $V(\mathbb{K}) = T \oplus \mathrm{Rad}(f)$

(si vedano note di ieri).

In generale se $\mathrm{Rad}(f) = \{\underline{0}\}$ cioè f è non degenere $\Rightarrow$

$$\boxed{X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)}$$

calcoliamo $\forall\ Y \leq V(\mathbb{K})$

$\dim Y^{\perp}$

prendiamo un insieme di generatori per Y e mettiamo tali vettori (le componenti di tali vettori) in una matrice $S \in \mathbb{K}^{m,n}$

osserviamo che

$\mathcal{Y}^\perp$ è formato da tutti e soli i vettori che ~~sod~~ (le cui componenti) soddisfano

(*) $\quad SA^TX = \underline{0}$

vettore colonna.

perché 1) $\mathcal{Y}^\perp = \mathcal{L}(\mathcal{Y})^\perp$

2) (*) corrisponde a dire che il vettore le cui componenti sono in X è ortogonale a tutti i vettori di un sist. di generatori di $\mathcal{Y}$.

(*) è un sistema lineare omogeneo in n incognite $n = \dim V(\mathbb{K})$

e di rango $k = \dim \mathcal{L}(\mathcal{Y})$
perché essendo A invertibile

$$rk(S) = rk(SA).$$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{Y}^{\perp} = n - k =$$
$$= \dim V - \dim \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

~~dim~~

$$\dim \mathcal{Y}^{\perp\perp} = n - \dim \mathcal{L}(\mathcal{Y}^{\perp})$$
$$= n - \dim \mathcal{Y}^{\perp} =$$
$$= n - (n - \dim \mathcal{L}(\mathcal{Y})) =$$
$$= \dim \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Ne segue che $\mathcal{Y}^{\perp\perp} = \mathcal{L}(\mathcal{Y})$
visto che $\mathcal{L}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}^{\perp\perp}$ $\square$

Def: Sia $f: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare $\bar{x}, \bar{y} \in V$. Si dice

$$\bar{x} \perp \bar{y} \iff f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

"$\bar{x}$ ortogonale ad $\bar{y}$".

Teorema: Sia $\bar{x} \in V$ un vettore con $f(\bar{x}, \bar{x}) \neq 0$ e sia $\bar{y} \in V$ (con f prodotto scalare).

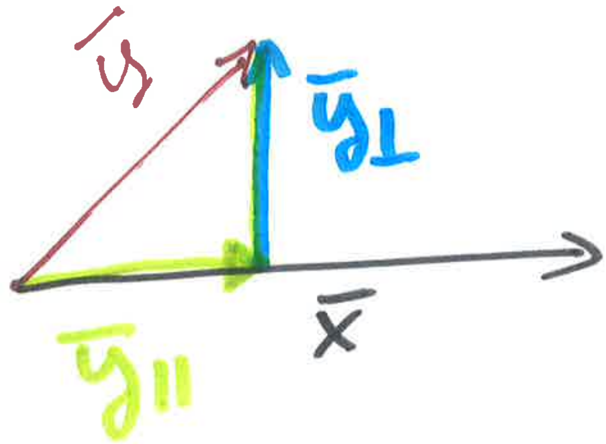
ALLORA È SEMPRE POSSIBILE TROVARE

$$\bar{y}_{\parallel} \text{ ed } \bar{y}_{\perp} \in V$$

tali che 1) $\bar{y} = \bar{y}_{\parallel} + \bar{y}_{\perp}$

2) $f(\bar{x}, \bar{y}_{\perp}) = 0$

3) $\bar{y}_{\parallel} \in \mathcal{L}(\bar{x})$.



DIM: poniamo $\bar{y}_{\parallel} = \dfrac{f(\bar{x},\bar{y})}{f(\bar{x},\bar{x})}\bar{x}$

$$\bar{y}_\perp = \bar{y} - \bar{y}_{\parallel}$$

che $\bar{y}_{\parallel} \in \mathcal{L}(\bar{x})$ è ovvio.

calcoliamo $f(\bar{y}_\perp, \bar{x}) =$

$$= f(\bar{y},\bar{x}) - f(\bar{y}_{\parallel},\bar{x}) =$$

$$= f(\bar{y},\bar{x}) - \frac{f(\bar{x},\bar{y})}{f(\bar{x},\bar{x})} f(\bar{x},\bar{x}) = 0$$

$\square$

Il vettore $\bar{y}_{\parallel}$ è detto proiezione ortogonale di $\bar{y}$ su $\bar{x}$.

Sia $f: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare e sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$.

$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ é ortogonale se

$\forall i,j,\ i \neq j \Rightarrow f(e_i, e_j) = 0$

<u>**ORTONORMALE**</u> se

$$\forall i,j,\ f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Sia $f: V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare e sia $(\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$. Si dice che la base $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è ortonormale se

$\forall i: \quad f(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1$ e $\forall i,j$ con $i \neq j$

$f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0.$

Cioé i vettori sono a 2 a 2 ortogonali e hanno prod. scalare con se stessi $= 1$.

OSS: Sia $(\bar{e}_1 - \bar{e}_t)$ una sequenza orto(normale) $\Rightarrow$ $(\bar{e}_1 - \bar{e}_t)$ é una sequenza libera.

D'ora in poi indicheró $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} * \bar{y}$

DIM: Supponiamo

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t = \underline{0}$$

osserviamo che

$$\bar{e}_i * (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_t \bar{e}_t) = \bar{e}_i * \underline{0} = 0$$

La matrice di un prodotto scalare rispetto una base ortogonale é una matrice diagonale.

La matrice di un prodotto scalare rispetto una base ortonormale é la matrice identica.

→ In particolare:

Se esiste una base ortonormale $\Rightarrow$ il prodotto scalare é non degenere.

Teorema: $V_n(\mathbb{K})$ ammette basi ~~ortonormali~~ ortogonali

[ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT].

ma

$$\bar{e}_i * (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r) =$$

$$= \alpha_1 (\bar{e}_i * \bar{e}_1) + \dots + \alpha_i (\bar{e}_i * \bar{e}_i) + \dots + \alpha_r (\bar{e}_i * \bar{e}_r) =$$

$$= \alpha_i (\bar{e}_i * \bar{e}_i) = \alpha_i = 0.$$

Quindi se una c. lineare di vettori dà $\underline{0}$, essa deve essere a coeff. tutti nulli. $\square$

<u>OSS</u>: la matrice del prodotto scalare $*$ rispetto una base <u>ortonormale</u> è

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ in particolare se $\exists$ una base ortonormale $\Rightarrow$

GRAM-SCHMIDT

DATA UNA BASE

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

costruire una base

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$

ORTOGONALE TALE CHE

1) $\bar{e}_i * \bar{e}_j = 0$ se $i \neq j$

2) $\forall k \leq n : \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k) = \mathcal{L}(\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_k)$.

I primi k vettori di $\mathcal{B}$ ed i primi k vettori di $\mathcal{B}'$ generano il medesimo sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$.

COROLLARIO.

Sia $A = {}^T\!A$ una matrice simmetrica $\Rightarrow \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che ${}^T\!PAP = D$ con D matrice diagonale.

<u>DIM</u>: A rappresenta rispetto una base $\mathcal{B}$ un prod. scalare. ORTOGONALIZZIAMO LA BASE OTTENENDO $\mathcal{B}'$ e ${}^T\!PAP$ RAPPRESENTA RISPETTO $\mathcal{B}'$ LA MEDESIMA FORMA.

Es: Verificare "a mano" che date a_{ij} si trovano

$$(*)\quad \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

p_{ij} tali che $(*)$ sia soddisfatta.

COSTRUZIONE DI $\mathcal{B}'$ A PARTIRE DA $\mathcal{B}$.

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1$$

$$\forall i : \quad \bar{e}_i' = \bar{e}_i - \sum_{j<i} \frac{(\bar{e}_i * \bar{e}_j')}{\bar{e}_j' * \bar{e}_j'} \bar{e}_j'$$

Ad ogni vettore si sottraggono le sue componenti rispetto i vettori precedenti.

Se si vuole ortonormalizzare bisogna anche dividere ogni vettore per $\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}$ ma questo richiede ipotesi sul prodotto scalare (vedi poi).

$$\overline{e}_2'' = \left(\overline{e}_2 - \frac{\overline{e}_1' * \overline{e}_2}{\overline{e}_1' * \overline{e}_1'}\,\overline{e}_1'\right)$$

$$\overline{e}_2' = \left(\overline{e}_2'' * \overline{e}_2''\right)^{-1} \cdot \overline{e}_2''$$

verifichiamo che

$$\overline{e}_2' * \overline{e}_1' = 0$$

$$\overline{e}_3'' = \overline{e}_3 - \frac{\overline{e}_1' * \overline{e}_3}{\overline{e}_1' * \overline{e}_1'}\,\overline{e}_1' - \frac{\overline{e}_2' * \overline{e}_3}{\overline{e}_2' * \overline{e}_2'}\,\overline{e}_2'$$

$$\overline{e}_3' = \left(\overline{e}_3'' * \overline{e}_3''\right)^{-1} \overline{e}_3''.$$

$\vdots$

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{e}_i'' &= \overline{e}_i - \sum_{j<i} \frac{\overline{e}_j' * \overline{e}_i}{\overline{e}_j' * \overline{e}_j'}\,\overline{e}_j' \\ \overline{e}_i' &= \left(\overline{e}_i'' * \overline{e}_i''\right)^{-1} \overline{e}_i'' \end{aligned}}$$

Ad ogni passo

$$\mathcal{L}(\overline{e}_1 \dots \overline{e}_i) = \mathcal{L}(\overline{e}_1' \dots \overline{e}_i').$$

$\square$

N.B.

Uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$ ammette una base $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n)$ di vettori ortogonale con $\bar{e}_i * \bar{e}_j \neq 0 \iff i=j$ se e solamente se il prodotto scalare é non degenere.

DIM: Se il prod scal. é non degenere $\Rightarrow$ ortogonalizzare $\Rightarrow$ la matrice é diagonale ma ha $\det \neq 0$ $\Rightarrow e_i * e_i \neq 0$.

Viceversa: se ~~ipotesi~~ $\exists$ una base come indicata $\Rightarrow$ la matrice di $*$ rispetto ad esso é diag. con $\det \neq 0$

$\square$

Sia $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Un prodotto scalare
$$*: V(\mathbb{R})\times V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$
é detto definito positivo
se $\forall \bar{x} \in V(\mathbb{R})$
$$\bar{x} * \bar{x} \geq 0 \text{ e}$$
$$\bar{x} * \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = \underline{0}$$

<u>Teorema</u>: Un prodotto scalare definito positivo é non degenere.
Inoltre $V_n(\mathbb{R})$ ammette rispetto tale prodotto una base ortonormale
e
$\forall X \subseteq V_n(\mathbb{R})$ con $\mathcal{L}(X) \neq \{\underline{0}\}$.

$$V_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(X) \oplus X^\perp$$

o, se preferite

$$V_n(\mathbb{R}) = X^{\perp\perp} \oplus X^\perp.$$

DIM:

1) Se ci fosse $\bar{y} \in V_n(\mathbb{R})$ con $\bar{y} \in Rad(*)$ $\Rightarrow$

$\bar{y} * \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \underline{0}$.

2) Applichiamo G/S. a partire da una base qualsiasi $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ ed otteniamo una base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ ortogonale.

adesso calcoliamo $\mathcal{B}'' = (\bar{e}_1'' \dots \bar{e}_n'')$ ponendo

$$\bar{e}_i'' = \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}} \bar{e}_i'$$

3) per verificare che

$$V_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(X) \oplus X^\perp$$

OSSERVIAMO CHE

$$\dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X)$$

$\Rightarrow$ in particolare ci basta far vedere che

$$X^\perp \cap \mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}.$$

perché in questo caso si ha che $X^\perp \oplus \mathcal{L}(X)$

e da

$$\dim X^\perp \oplus \mathcal{L}(X) = \dim X^\perp + \dim \mathcal{L}(X)$$

$$= n - \dim \mathcal{L}(X) + \dim \mathcal{L}(X)$$

si deduce

$$\dim[X^{\perp} \oplus \mathcal{L}(X)] = n = \dim V_n(\mathbb{R})$$

e dunque

$$X^{\perp} \oplus \mathcal{L}(X) = V_n(\mathbb{R})$$

D'altro canto:

$$\bar{y} \in X^{\perp} \cap \mathcal{L}(X)$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \mathcal{L}(X)^{\perp} \cap \mathcal{L}(X)$$

$$\Rightarrow \bar{y} * \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \underline{0}$$

□

<u>Def</u>: Sia $\bar{x} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ spazio vettoriale di dim n su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare "$\circ$" definito positivo

→ Spazio vettoriale euclideo.

Chiamiamo <u>norma</u> di $\bar{x}$

il ~~vettor~~ numero reale positivo

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} \circ \bar{x}} \; . \geq 0$$

<u>N.B</u>: $\|\alpha \bar{x}\| = \sqrt{\alpha \bar{x} \circ \alpha \bar{x}} = \sqrt{\alpha^2 \bar{x} \circ \bar{x}} =$

$= |\alpha| \cdot \|x\|$.

La **norma** di un vettore rappresenta la sua "lunghezza".

OSS: Sia $V_n^o(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale Euclideo.

ALLORA valgono le seguenti disuguaglianze.

1) $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V_n^o(\mathbb{R})$

$$|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

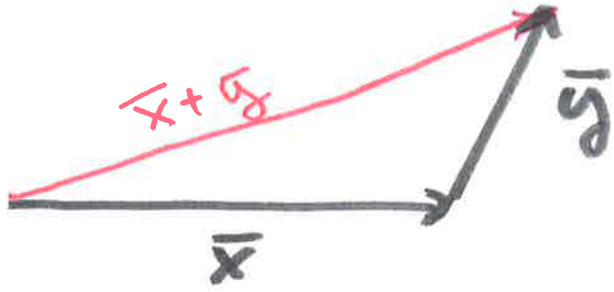
(disuguaglianza di Cauchy-Schwartz).

Diciamo coseno dell'angolo fra i vettori $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ con $\bar{x}, \bar{y} \neq \underline{0}$

$$\boxed{-1 \leq \cos \widehat{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1}$$

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

disuguaglianza triangolare.



$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

in geometria euclidea la somma delle lunghezze di 2 lati di un triangolo è sempre $\geq$ della lunghezza del terzo lato.

DIM: $$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|.$$

1) Se $\bar{x}=\underline{0}$ o $\bar{y}=\underline{0} \Rightarrow 0 \le 0$ ok

2) Altrimenti consideriamo il vettore $\alpha\bar{x}+\bar{y}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$(\alpha\bar{x}+\bar{y})\cdot(\alpha\bar{x}+\bar{y}) \geq 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\alpha^2\,\bar{x}\cdot\bar{x} + 2\alpha\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{y} \geq 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\frac{\Delta}{4} = (\bar{x}\cdot\bar{y})^2 - (\bar{x}\cdot\bar{x})(\bar{y}\cdot\bar{y}) \leq 0$$

perché altrimenti l'espressione cambierebbe di segno.

$$(\bar{x}\cdot\bar{y})^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|y\|^2$$

estraendo le radici quadrate

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|.$$

$\square$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$ $\Longleftrightarrow$ elevando al quadrato.

$\Longleftrightarrow$ $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$

in particolare

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2(\bar{x}\cdot\bar{y}) \leq$$

$$\leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \quad C/S$$

$$\leq \|x\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| = (\|\bar{x}\| + \|y\|)^2$$

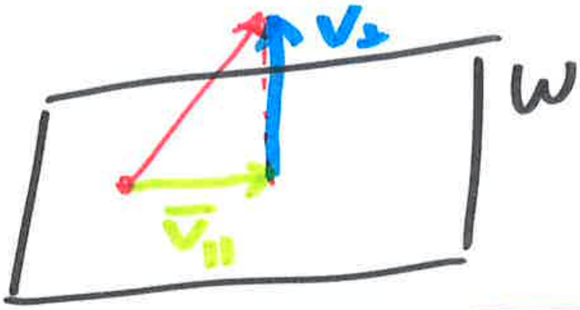
estraendo le radici si ottiene $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ $\square$

~~oss~~ Che legame c'è fra norme prodotti scalari e proiezioni ortogonali?

Sia $\bar v \in V_n^0(\mathbb{R})$ e $W \leq V_n^0(\mathbb{R})$.

si dice proiezione ortogonale di $\bar v$ su W un vettore $\bar v_{\parallel} \in W$ tale che

$\bar v = \bar v_{\parallel} + \bar v_{\perp}$ con $\bar v_{\perp} \in W^{\perp}$



OSS: $\boxed{\bar v_{\parallel} \text{ e } \bar v_{\perp} \text{ sono univocamente determinati.}}$!!

supponiamo $\exists\, \bar v_{\parallel}, \bar v_{\parallel}' \in W$ tali

che $\cancel{\bar v_{\parallel}}$ $\bar v - \bar v_{\parallel} \in W^{\perp}$ e $\bar v - \bar v_{\parallel}' \in W^{\perp}$

allora $\cancel{\forall \bar{v} \in W}$ $(\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}) - (\bar{v}-\bar{v}'_{\parallel}) =$
$\cancel{\bar{v}_{\parallel} + x}$
$= (\bar{v}'_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel}) \in W^{\perp}$

ma $\bar{v}_{\parallel}$ e $\bar{v}'_{\parallel} \in W \Rightarrow$

$\bar{v}'_{\parallel} - \bar{v}_{\parallel} \in W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

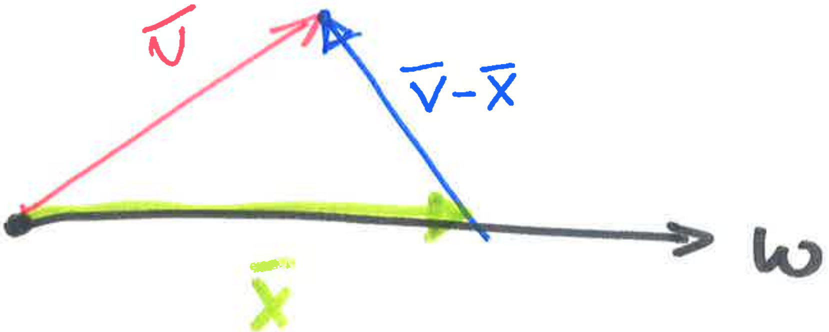
ne segue $\bar{v}'_{\parallel} = \bar{v}_{\parallel}$.

La proiezione ortogonale è univocamente determinata.

In generale $\bar{v}_{\parallel}$ è il vettore tale che $\bar{v}_{\parallel} \in W$, $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{x}$ e $\|\bar{x}\|$ è la più piccola possibile.

Detto meglio. Sia $\bar{w} \in W$ tale che $\bar{v} = \bar{w} + \bar{x}$ e $\|\bar{x}\|$ sia la più piccola possibile $\Rightarrow \bar{w} = \bar{v}_{\parallel}$

ed $\bar{x} = \bar{v}_\perp$.



Sia $\bar{v}_\parallel$ la proiezione di $\bar{v}$ su W

e $\bar{w}$ un qualsiasi vettore di W

$$\Rightarrow \|(\bar{v}-\bar{w})\|^2 = \|(\bar{v}-\bar{v}_\parallel+\bar{v}_\parallel-\bar{w})\|^2 =$$

$$= (\bar{v}-\bar{v}_\parallel+\bar{v}_\parallel-\bar{w})\cdot(\bar{v}-\bar{v}_\parallel+\bar{v}_\parallel-\bar{w}) =$$

$$= (\bar{v}-\bar{v}_\parallel)\cdot(\bar{v}-\bar{v}_\parallel) + (\bar{v}-\bar{v}_\parallel)\cdot(\bar{v}_\parallel-\bar{w}) +$$

$$+ (\bar{v}_\parallel-\bar{w})\cdot(\bar{v}_\parallel-\bar{w}) =$$

$$= \|\bar{v}-\bar{v}_\parallel\|^2 + 0 + \|\bar{v}_\parallel-\bar{w}\|^2 \geq \|\bar{v}-\bar{v}_\parallel\|^2.$$

$\square$

$\bar{v}-\bar{v}_\parallel \in W^\perp$

$\bar{v}_\parallel-\bar{w} \in W$

~~Def~~: Oss: Sia $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_r)$ una base ortonormale di W.

Allora il vettore $\bar{v}_\parallel$ si scrive.

come

$$\overline{V}_{\parallel} = \sum_{i=1}^{t} (\overline{w}_i \cdot \overline{v}) \cdot \overline{w}_i$$

Infatti: 1) $\overline{V}_{\parallel} \in W$

2) $(\overline{V} - \overline{V}_{\parallel}) \cdot \overline{w}_i \quad \forall i$

$$= \overline{w}_i \cdot \overline{V} - \overline{w}_i \cdot \overline{V} = 0$$

In particolare se $\overline{v}$ é un vettore e $\overline{w}$ é un vettore con ~~[illegible]~~ $\overline{w} \cdot \overline{w} \neq 0$ si dice <u>coeff. di Fourier</u> di $\overline{v}$ rispetto $\overline{w}$ il numero

$$\frac{\overline{v} \cdot \overline{w}}{\overline{w} \cdot \overline{w}}.$$

I coeff. di Fourier di un vettore $\overline{v}$ rispetto una base ortonormale sono proprio le componenti dei vettori rispetto quella base.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{———} \bar{e}_n)$ ortonormale

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$\Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{e}_i = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_i \bar{e}_i + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) \cdot e_i =$$

$$= \alpha_i \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \alpha_i$$

CALCOLARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ A PARTIRE DA

$(1\ 0\ 1) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)}$

$(1\ 0\ {-1}) \longrightarrow (1\ 0\ {-1}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)\cdot(1\ 0\ {-1}) \cdot (1\ 0\ 1)$

$(1\ 1\ 1)$

$\downarrow$

$(1\ 0\ {-1}) \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ {-1})}$.

$(1\ 1\ 1) \rightarrow$

$$(1\,1\,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,1)\cdot(1\,1\,1)\,(1\,0\,1)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{(1\,0\,-1)\cdot(1\,1\,1)\cdot(1\,0\,-1)}$$

$$= (1\,1\,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\,(1\,0\,1) =$$

$$= (1\,1\,1) - \sqrt{2}\,(1\,0\,1) =$$

$$= \cancel{(1-\sqrt{2}\ \ 1\ \ 1-\sqrt{2})} = (0\,1\,0).$$

$$\mathcal{B}' = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0\,1\,0)\right).$$

$$\mathcal{B} = ((1\,1\,1)\ (1\,0\,-1), (1\,0\,1))$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1\,1\,1)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,-1)$$

$$(1\ 0\ 1) - \frac{2}{3}(1\ 1\ 1) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right).$$

da normalizzare

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right)$$

$$B' = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\right.$$

$$\left.\cancel{\left(\frac{\sqrt{6}}{9}, -\right)}\ \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right)\right)$$

L'ordine con cui si ortonormalizza cambia il risultato.