Teorema: La somma di autospazi associati ad autovalori differenti é diretta.

<u>DIM</u> : • $n=2$

$$\bar{v} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$A\bar{v} = \lambda_1 \bar{v} = \lambda_2 \bar{v} = A\bar{v}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v} = \underline{0} \Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$$

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$$

• $n-1 \Rightarrow n$

Sia $X \in V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$ tale che

$\exists \; X_i, y_i \in V_{\lambda_i}$ con

$$X = X_1 + \dots + X_n = y_1 + \dots + y_n$$

e WLOG supponiamo $y_1 \neq X_1$

$$\underline{0} = (X_1 - y_1) + (X_2 - y_2) + \dots + (X_n - y_n)$$

$$\underline{0} = A\underline{0} \qquad \underline{0} = \lambda_1 \underline{0}$$

$$A\,\underline{0} = A(x_1-y_1)+A(x_2-y_2)+\dots+A(x_n-y_n)$$

$$= \lambda_1(x_1-y_1)+\lambda_2(x_2-y_2)+\dots+\lambda_n(x_n-y_n)$$

$$\lambda_1\underline{0} = \lambda_1(x_1-y_1)+\lambda_1(x_2-y_2)+\dots+\lambda_1(x_n-y_n)$$

sottraendo abbiamo

$$\underline{0} = A\underline{0}-\lambda_1\underline{0} = (\lambda_2-\lambda_1)(x_2-y_2)+\dots+(\lambda_n-\lambda_1)(x_n-y_n)$$

somma di vettori appartenenti a $(n-1)$ autospazi; per l'ipotesi induttiva tutti gli addendi devono essere $\underline{0}$

$$(\lambda_i-\lambda_1)(x_i-y_i)=\underline{0} \quad \forall i$$

ma $\lambda_i-\lambda_1\neq 0$ se $i>1$ $\Rightarrow$ $(x_i-y_i)=\underline{0}$

$$\Rightarrow \quad x = x_1+x_2+\dots+x_n = y_1+x_2+\dots+x_n$$

DA cui sottraendo $x_1=y_1$ e quindi la somma è diretta $\square$

Teorema spettrale.

Tutti gli autovalori di una matrice reale e simmetrica sono reali.

<u>Def</u>: Una matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta <u>ortogonale</u> se

$$\boxed{{}^{T}A = A^{-1}}$$

Es. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema (della base spettrale).

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile (i.e. diagonalizzabile con diagonalizzante ortogonale reale) $\iff A = {}^{T}A$ è simmetrica.

DIM che se A è ort. diag. $\Rightarrow A = {}^{T}A$

A ort. diag $\Rightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1} = {}^{T}P$ e

$$P^{-1}AP = D \text{ con } D \text{ diag.}$$

$$\parallel$$

$$ {}^{T}PAP = D$$

trasponendo tutto

$$ {}^{T}P\,{}^{T}A\,P = {}^{T}D = D = {}^{T}PAP$$

moltiplicando a sx per $P = {}^{T}P^{-1}$ ed a dx per P^{-1} si ha ${}^{T}A = A$ $\square$

Spazi vettoriali Euclidei:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Sia $V = V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dice <u>forma</u> una funzione che ha come dominio V o il prod. cartesiano di un certo numero di copie di V e come <u>codominio $\mathbb{K}$</u>.

<u>Es.</u> forma lineare.

$$f : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

e f lineare.

[la matrice di una forma lineare è un vettore riga]

$$f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w})$$

Def:

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

è detta forma bilineare se

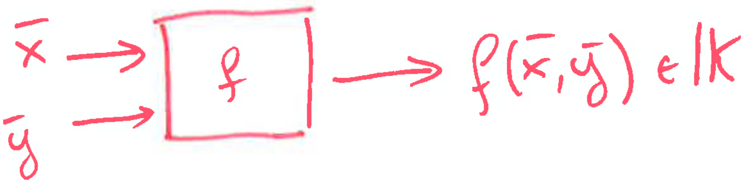
$\forall \bar{x} \in V$ le funzioni

$$f(\bar{x}, -) : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{y} \to f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

e

$$f(-, \bar{y}) : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{x} \to f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

sono forme lineari.



se fissiamo uno dei 2 input di f
$\Rightarrow$ abbiamo una forma lineare.

[sul libro

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{z}) + \beta f(\bar{y}, \bar{z})$$

$$f(\bar{x}, \alpha\bar{y} + \beta\bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta f(\bar{x}, \bar{z})$$

Def: $f: V \times V \to \mathbb{K}$ è detta

simmetrica se $f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y},\bar{x})$
$\forall \bar{x},\bar{y} \in V$.

alternante se $f(\bar{x},\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in V$.

N.B: f alternante $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \bar{x},\bar{y} \in V: \quad f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y},\bar{x})$

DIM: $0 = f(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}+\bar{y},\bar{x}) + f(\bar{x}+\bar{y},\bar{y}) =$

$= \underbrace{f(\bar{x},\bar{x})}_{=0} + f(\bar{y},\bar{x}) + f(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{f(\bar{y},\bar{y})}_{=0} =$

$= f(\bar{y},\bar{x}) + f(\bar{x},\bar{y})$

Esempio di forma alternante

$$\begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K} \\ ((a,b),(c,d)) \to \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

I determinanti sono forme n-multilineari alternanti (hanno in input n vettori).

Def: Una forma bilineare simmetrica $V \times V \to \mathbb{K}$ è detta prodotto scalare in V.

N.B prodotto scalare $\neq$ prodotto per scalare

$V \times V \to \mathbb{K}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{K} \times V \to V$

OSS: Sia $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base.
Allora è sempre possibile rappresentare una forma bilineare mediante una matrice $n \times n$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_n \bar{e}_n$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = f\left(\sum_i \alpha_i \bar{e}_i, \sum_j \beta_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i \alpha_i f\left(e_i, \sum_j \beta_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

In particolare i valori di f sono univocamente determinati dai valori di $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ al variare di i, j fra 1 ed n.

Chiamo

$$A = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1 \bar{e}_1) \dots & f(\bar{e}_1 \bar{e}_n) \\ \vdots & \\ f(\bar{e}_n \bar{e}_1) \dots & f(\bar{e}_n \bar{e}_n) \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = [\alpha_1 \dots \alpha_n] A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Infatti $A \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 f(e_1 e_1) + \dots + \beta_n f(\bar{e}_1 \bar{e}_n) \\ \vdots \\ \beta_1 f(\bar{e}_n \bar{e}_1) + \dots \beta_n f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}$

e moltiplicando a sx per $[\alpha_1 \dots \alpha_n]$

otteniamo

$$(\alpha_1 \text{———} \alpha_n)\begin{bmatrix} \sum \beta_j f(\bar{e}_1, \bar{e}_j) \\ \vdots \\ \sum \beta_j f(\bar{e}_n, \bar{e}_j) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Si puó sempre rappresentare una forma bilineare (simmetrica) mediante una matrice quadrata.

<u>OSS</u>: Se f é alternante $\Rightarrow$ ${}^T A = -A$ ove A é la matrice di f

Se f é simmetrica $\Rightarrow$ ${}^T A = A$

(sono dei se e solamente se).

f alternante $\Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, x)$

$\Rightarrow f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = -f(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$.

e quindi la matrice soddisfa

$$^{T}A = -A$$

viceversa se $^{T}A = -A \Rightarrow$

$$f(\bar{x},\bar{y}) = {}^{T}\bar{x} A \bar{y} = \cancel{{}^{T}\bar{y} A}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) =$$

$$= -\sum_{i,j} x_i y_j f(\bar{e}_j,\bar{e}_i) =$$

$$= -{}^{T}\bar{y} A \bar{x} = -f(\bar{y},\bar{x}).$$

N.B: Se f alternante e $-1 \neq 1 \Rightarrow$
$f(\bar{e}_i,\bar{e}_i) = 0$

similmente: se f simmetrica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f(\bar{x},\bar{y}) = {}^{T}\bar{x} A \bar{y}$~~

$$f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = f(\bar{e}_j,\bar{e}_i) \Rightarrow A = {}^{T}A$$

viceversa se $A = {}^{T}A \Rightarrow$

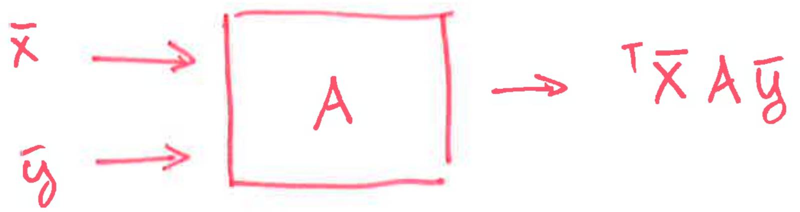
$$f(\bar{x},\bar{y}) = {}^{T}\bar{x} A \bar{y} = \sum_{i,j} x_i y_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j f(\bar e_j, \bar e_i) = {}^T\bar y A \bar x =$$

$$= f(\bar y, \bar x).$$

BILINEARE SIMMETRICA ED ALTERNANTE SONO PROPRIETÀ CHE SI "LEGGONO" DIRETTAMENTE SULLA MATRICE DI f.

Come cambia la matrice A al cambiare della base $\mathcal{B}$ scelta per $V(\mathbb{K})$?



rispetto la base $\mathcal{B}$

$\cancel{\bar x' = \sum a_i \bar e_i'}$ $\cancel{\bar x = \sum x_i \bar e_i}$

$\cancel{\bar y' = \sum b_i \bar e_i'}$ $\cancel{\bar y =}$

$$\bar{x} = \sum x_i' \bar{e}_i' = \sum x_i \bar{e}_i$$

$$\bar{y} = \sum y_i' \bar{e}_i = \sum y_i \bar{e}_i$$

chiamo $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

${}^T X' = {}^T X A$ cioè $X' = {}^T A X$

Sia B la matrice della forma bilineare rispetto a $\mathcal{B}$ e B' la stessa rispetto a $\mathcal{B}'$.

$${}^T X B Y = {}^T X' B' Y'$$

ma $X' = {}^T\!A X$

$y' = {}^T\!A y$

$$ {}^T\!X B y = {}^T({}^T\!A X) B' ({}^T\!A y) $$

$$ = {}^T\!X (A B' {}^T\!A) y $$

ragionando come per le applicazioni lineari, tenuto conto che $AB'{}^T\!A$ rappresenta una forma bilineare abbiamo

$$ \boxed{B = A B' {}^T\!A} $$

N.B. ${}^T\!A$ non A^{-1}

con $A \in GL(n, \mathbb{K})$.

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ ed $f: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

Chiamiamo <u>rango</u> di f il rango di una qualsiasi matrice che rappresenta f e diciamo che f é non degenere se $\operatorname{rk}(f) = n$ ovvero f é rappresentata da una matrice invertibile.

Sia $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$.

Chiamo $X^\perp$ "X perp" o X ortogonale l'insieme

$$X^\perp = \{\bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) : f(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

OSSERVAZIONI: 1) $X^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$

infatti siano $\bar{u}, \bar{h} \in X^\perp \Rightarrow$

$f(\bar{x}, \alpha\bar{a}+\beta\bar{b}) = \alpha f(\bar{x},\bar{a}) + \beta f(\bar{x},\bar{b})$
$= 0$ per ogni $x \in X$

$\Rightarrow \alpha\bar{a}+\beta\bar{b} \in X^{\perp}$ e quindi $X^{\perp}$ e' sottospazio.

2) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

Sia $A \subseteq B \Rightarrow \forall \bar{a} \in A, \bar{a} \in B.$

Sia ora $\bar{y} \in B^{\perp} \Rightarrow \forall \bar{b} \in B,$
$f(\bar{b},\bar{y}) = 0 \Rightarrow$ in particolare $\forall \bar{a} \in A$
$f(\bar{a},\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} \in A^{\perp}$

3) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ per ogni $A \subseteq V_n(\mathbb{K})$

in quanto

$A^{\perp\perp} = \{\bar{y} \in V : \forall \bar{x} \in A^{\perp} : f(\bar{x},\bar{y}) = 0\}.$

ma $\forall \bar{x} \in A^{\perp}$, $f(\bar{a},\bar{x}) = f(\bar{x},\bar{a}) = 0 \ \forall \bar{a} \in A$

quindi in particolare $\bar{a} \in A \Rightarrow \bar{a} \in A^{\perp\perp}.$

N.B: l'ortogonalità corrisponde a ~~dell~~ risolvere dei sistemi di equazioni.

Esempio.

In $\mathbb{K}^n$: consideriamo il prodotto scalare standard = prodotto scalare definito dalla matrice identica rispetto la base canonica.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Sia $A = \left((a_{11} \dots a_{1n}), \dots (a_{m1} \dots a_{mn}) \right)$ un sottoinsieme di vettori di $\mathbb{K}^n$.

Cosa è $A^\perp$?

$(x_1 \text{——} x_n)$ tali che $(a_{11} \dots a_{1n}) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0$

$(a_{21} \dots a_{2n}) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0 \dots$

$$(a_{m1} \cdots a_{mn}) \cdot (x_1 \cdots x_n) = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}$$

TROVARE $A^\perp$ corrisponde a trovare le soluzioni di un sistema lineare omogeneo le cui equazioni (= righe) sono date dai vettori di A.

ed $A^{\perp\perp}$? In questo caso $A^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$

(è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ che contiene A; nel caso specifico è lo spazio vettoriale ~~de~~ i cui elementi rappresentano tutte le equazioni che hanno come soluzioni gli elementi di $A^\perp$).

Def: Sia $f: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ bilineare e simmetrica.

ALLORA chiamiamo **RADICALE** di f, $Rad(f) := \{\bar{v} \in V_n : \forall \bar{x} \in V : f(\bar{v}, \bar{x}) = 0\}$

$= V_n^{\perp}$.

Teorema: 1) $Rad(f) \leq V_n(\mathbb{K})$.

2) $Rad(f) = \{\underline{0}\}$ se e solamente se f é non degenere.

3) ~~Se~~ $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X) + Rad(f)$

e $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X) \iff Rad\, f = \{\underline{0}\}$

DIM: Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ e sia A la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow Rad(f) = \{\bar{y} : {}^t\bar{x} A \bar{y} = \underline{0}, \forall \bar{x} \in V\}$

ma ${}^t\bar{x} A \bar{y} = \underline{0}$ $\forall \bar{x}$ se e solamente se $A\bar{y} = \underline{0}$

(in quanto altrimenti $A\bar{y}$ ha almeno una componente i-esima $\neq 0$ ed allora ${}^t\bar{e}_i A\bar{y} \neq 0$).

$\Rightarrow \mathrm{Rad}(f) = \{\bar{y} : \bar{y} \in \ker(A)\} =$

$= \ker(A)$

In particolare $\mathrm{Rad}(f) \leq V_n(\mathbb{K})$.
ed è banale $\Leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = n$.

3) Sia ora $X^{\perp\perp}$ chiaramente $X \subseteq X^{\perp\perp}$ e poiché $X^{\perp\perp}$ è spazio vettoriale $\mathcal{L}(X) \leq X^{\perp\perp}$. Inoltre $\mathrm{Rad}(f) \subseteq Y^{\perp}$ per ogni $Y \subseteq V$ (perché gli el.

di $Rad(f)$ sono ortogonali
e tutti gli el. di V e
quindi $Rad(f) \subseteq X^{\perp\perp} \Rightarrow$
$\mathcal{L}(X) + Rad(f) \subseteq X^{\perp\perp}$.

Viceversa:

A) Se $Rad(f) = \{0\} \Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$

infatti (ragionando in componenti)

Sia S = matrice dei vettori per colonne che generano una base di $\mathcal{L}(X)$.
A = matrice di f

$X^{\perp} = \{ y : {}^tS A y = 0 \}$.

se $\det A \neq 0 \Rightarrow rk({}^tSA) = rk(S)$

$\Rightarrow \dim X^{\perp} = n - rk(S) = n - \dim \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow \dim X^{\perp\perp} = n - \dim X^{\perp} =$

$= n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) =$

$= \dim \mathcal{L}(X).$

D'altro canto $X^{\perp\perp} \supseteq \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X).$

per il viceversa: si decompone lo spazio in 2 blocchi

$$\mathrm{Rad}(f) \oplus T$$

con T in somma diretta.

Rispetto una opp. base la matrice diviene

$$\begin{array}{r|c|c} & \text{vettori del radicale} & \\ \hline \text{vettori del radicale} \rightarrow & 0 & 0 \\ \hline & 0 & A' \end{array} \qquad \det A' \neq 0$$

e si ragiona "in blocchi".

$\rightarrow$ ALTERNATIVAMENTE ...

Sia $Rad(f) \leq V(\mathbb{k})$.

completando a base

$$V(\mathbb{k}) = T \oplus Rad(f).$$

$$\forall \bar{x} \in V \ \exists! \ \tilde{x} \in T, \ \bar{\pi} \in Rad(f): \ \bar{x} = \tilde{x} + \bar{\pi}$$

Sia ora $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t)$ e

poniamo $\tilde{X} = \mathcal{L}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t)$.

osserviamo che

$$\tilde{X}^{\perp} = X^{\perp}$$

in quanto

$$\bar{y} \in X^{\perp} \iff \forall i \ f(\bar{x}_i, \bar{y}) = 0 \iff f(\tilde{x}_i + \bar{\pi}_i, \bar{y}) = 0$$

$$\iff f(\tilde{x}_i, \bar{y}) = 0 \text{ in quanto } f(\bar{\pi}_i, \bar{y}) = 0$$

$\perp_T$ = relazione perp ristretta a T.

CLAIM: $\tilde{X}^{\perp} = (\tilde{X}^{\perp_T} \cap T) + Rad(f)$.

infatti se $\bar{z} \in \tilde{X}^{\perp} \Rightarrow \bar{z} = \tilde{z} + \bar{\pi}$ con

$$f(\tilde{x}_i, \tilde{z} + \bar{\pi}) = 0 \ \forall i$$

$$f(\tilde{x}_i, \tilde{z}) = 0$$

ORA $X^{\perp\perp} = (\tilde{X}^{\perp})^{\perp} = (\tilde{X}^{\perp_T \perp_T} \cap T) + Rad(f) =$

$$= \mathcal{L}(\tilde{X}) + Rad\, f = \mathcal{L}(X) + Rad(f).$$