Come determinare se $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ é diagonalizzabile ed eventualmente diagonalizzarla.

→ Determinare gli autovettori di M

se X é autovettore di A $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lambda$ tale che $AX = \lambda X$ & $X \neq \underline{0}$

$$(A - \lambda I)X = \underline{0} \qquad (*)$$

$(*)$ ammette soluzioni diverse da $\underline{0}$

$\Leftrightarrow$ non é un sistema di Cramer

$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)$ non é una matrice invertibile.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}_{\text{equazione caratteristica di } A}$$

I possibili autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica.

Viceversa se λ radice di

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

allora il sistema $(A-\lambda I)X = \underline{0}$ ammette almeno $\infty^{n-(n-1)} = \infty^1$ soluzioni $\Rightarrow \exists$ un autovettore di autovalore λ.

Def: Si dice <u>spettro</u> di A l'insieme

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A-\lambda I)=0\}.$$

insieme di tutti gli autovalori di A.

DATO $\bar{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A)$

$$V_{\bar{\lambda}} = \{X \mid (A-\lambda I)X = \underline{0}\}.$$

é detto autospazio di autovalore $\bar{\lambda}$.

N.B. per costruzione $\dim V_{\bar{\lambda}} \geq 1$

Def: $\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$

molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$: $m_a(\bar{\lambda})$ numero di volte in cui $\bar{\lambda}$ é radice di $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$\left[(\lambda - \bar{\lambda})^{m_a(\bar{\lambda})} \mid \det(A - \lambda I) \text{ mentre } (\lambda - \bar{\lambda})^{m_a(\bar{\lambda})+1} \nmid \det(A - \lambda I) \right]$$

molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$

$$m_g(\bar{\lambda}) = \dim V_{\bar{\lambda}}$$

N.B. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é un polinomio in λ di grado n detto polinomio caratteristico di A.

OSS: Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi anche lo stesso determinante e gli stessi autovalori.

DIM: Sia $B = P^{-1}AP \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) =$$

$$= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) =$$

$$= (\det P)^{-1} p_A(\lambda) \det(P) =$$

$$= p_A(\lambda).$$

E $\operatorname{Det}(B) = p_B(0) = p_A(0) = \det A.$

Una matrice A é diagonalizzabile
$\Leftrightarrow$ simile ad una matrice diagonale
$\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A.

1) OSSERVIAMO CHE GLI AUTOSPAZI DI A SONO SEMPRE IN SOMMA DIRETTA FRA LORO.

(in particolare se $Spec(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_t\}$.

$$\Rightarrow \quad V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$$

nel senso che ogni vettore della somma si scrive in modo unico come

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_t$$

con $\bar{v}_i \in V_{\lambda_i}$

Se gli autospazi sono in somma diretta $\Rightarrow$ l'unione delle loro basi é ancora una base della somma.

In particolare $\exists$ una base di autovettori per $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ la somma degli autospazi e' $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}) = n$

$\Leftrightarrow \sum \dim(V_{\lambda_i}) = n$ perché la somma é diretta

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{\lambda_i \in Spec(A)} m_g(\lambda_i) = n.}$

<u>DIM</u>: per induzione sul numero t di autospazi

$t=2$: Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due autovalori di A.

Supponiamo $\bar{x} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow Ax = \lambda_1 x = \lambda_2 x = Ax$

$(\lambda_1 - \lambda_2) x = \underline{0}$

e dunque poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$x = \underline{0} \Rightarrow V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{e\}$.

$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ $\square$

$t-1 \Rightarrow t$

Hp: la somma di $(t-1)$ autospazi é diretta.

Ts: la somma di t autospazi é diretta.

$$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_t}$$ con λ_i tutti diversi

e supponiamo per assurdo $\exists X \in$ somma

con

$$X = X_1 + \dots + X_t =$$
$$= y_1 + \dots + y_t$$

con $X_i, y_i \in V_{\lambda_i}$

e $(X_1 \text{ --- } X_t) \neq (y_1 \text{ --- } y_t)$

supponiamo in particolare

$$X_1 \neq y_1$$

e calcoliamo

DIMOSTRAZIONE DA INSERIRE

$$X = X_1 + \dots + X_t = y_1 + \dots + y_t \qquad x_i, y_i \in V_{\lambda_i}$$

$$(x_1-y_1)+\dots+(x_t-y_t)=\underline{0}$$

$$A\left[(x_1-y_1)+\dots+(x_t-y_t)\right]=\underline{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1(x_1-y_1)+\dots+\lambda_t(x_t-y_t)=\underline{0} \qquad (1)$$

ma anche

$$\lambda_1\left[(x_1-y_1)+\dots+(x_t-y_t)\right]=\underline{0}$$

$$\lambda_1(x_1-y_1)+\dots+\lambda_1(x_t-y_t)=\underline{0} \qquad (2)$$

SOTTRAENDO (2) da (1)

$$(\lambda_2-\lambda_1)(x_2-y_2)+\dots+(\lambda_t-\lambda_1)(x_t-y_t)=\underline{0}$$

$(t-1)$ sottospazi & $\lambda_i \neq \lambda_1$ $i>1$

$$\Rightarrow x_2=y_2 \dots x_t=y_t \Rightarrow x_1=y_1 \quad ↯$$

□

1) DIAG $\iff \sum m_g(\lambda_i) = n$

2) $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ (*)

in particolare se $\sum m_g(\lambda_i) = n$

$\Rightarrow \sum m_a(\lambda_i) = n$ e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

$\forall i$.

Tutti gli autovalori di A sono regolari (i.e. $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$).

<u>DIM</u>: Supponiamo che A abbia un autovalore λ con

$m_g(\lambda) = t \Rightarrow m_a(\lambda) \geq t$

Sia A con autovalore λ e sia $\mathcal{B}_\lambda$ una base di V_λ

costruiamo una matrice P

tale che le prime t colonne di P

coincidono con i vettori di B_{E_λ}; le rimanenti si ottengono completando a base.

$$\cancel{AP = \lambda} \qquad AP = (A^T P_1 \;\cdots\; A^T P_n) =$$

$$= (\lambda^T P_1 \; \lambda^T P_2 \cdots \lambda^T P_t \; A^T P_{t+1} \cdots A^T P_n)$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & \end{array}\right]$$

t volte

la matrice $P^{-1}AP$ é simile ad A e quindi ha lo stesso polinomio caratteristico.

in particolare in $P^{-1}AP$ la molteplicità algebrica di λ è la stessa che in A.

ma $\det(A - xI) =$

$$= \det(P^{-1}AP - xI) = \det \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda - x & \\ \hline & 0 & & \underbrace{C - xI}_{} \end{array}\right]$$

$$= (\lambda - x)^t \cdot \det(C - I_{n-t})$$

e quindi λ è radice del polinomio caratteristico almeno t volte. $\Rightarrow m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$.

$\square$

N.B può anche essere che $(\lambda - x) \mid \det(C - I_{n-t})$.

DIAGONALIZZARE

1) Si calcolano gli autovalori di A
Spec(A).
Se $\exists$ autovalori che non sono in $\mathbb{K} \Rightarrow$ A non é diagonalizzabile perché $\sum m_a(\lambda) < n$

2) $\forall \bar{\lambda} \in Spec(A)$ si calcolano
$$m_g(\bar{\lambda})$$
se $\forall$ autovalore é regolare
$\Rightarrow \sum m_g(\lambda) = \sum m_a(\lambda) = n$
$\Rightarrow$ A é diagonalizzabile.
(se uno $\rightarrow$ non é diag.).

3) Si cercano gli autospazi di A e $\forall$ autospazio si determina una base.

4) Si scrivono le matrici diagonale D e diagonalizzante P associate ad A ove

D matrice diagonale con gli autovalori sulla diag. princ.

P matrice diagonalizzante con per colonne i vettori delle basi degli autospazi nel medesimo ordine degli autovalori.

N.B: P é quadrata e $\det(P) \neq 0$.

Es. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ DIAG O NO?

DIPENDE DAL CAMPO.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \quad \lambda = \pm i$$

se siete su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ NO

se siete su $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ sì

OSS: 1) Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ha n autovalori distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

(in particolare se A è triangolare calcolare gli autovalori è facile).

$\downarrow$

sono le entrate sulla diagonale!

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ non è diag.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 2 & 5 \\ & & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{NON È DIAG.}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} m_a(\lambda) = t \\ m_g(\lambda) = 1 \end{array}$$

t

Richiamo alcune proprietà di $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Si può vedere anche come l'insieme di tutte le matrici 2×2 della forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

con il prod. righe per colonne e la

somma usuale

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i^2 = -1$$

<u>oss.</u> $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ è sempre invert.

se $(a,b) \neq (0,0)$.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

In particolare ogni elemento di $\mathbb{C}$ diverso da 0 è invertibile. Il prodotto è commutativo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo.

Teorema (fondamentale dell'algebra)

$\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

cioè ogni equazione in una incognita di grado $d \geq 1$ ammette sempre almeno una soluzione.

$\downarrow$

OGNI EQUAZIONE $f(x) = a$ con $n = \deg f \geq 1$ ammette sempre n soluzioni.

<u>OSS</u> 1) Si dice coniugio la funzione

$$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$a+ib \mapsto a-ib$$

$$\bar{z} = \overline{(a+ib)} = a - ib.$$

il coniugio corrisponde a ~~[illegible]~~

trasporre
la matrice che rappresenta

$$z = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = {}^{T}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

__DOMANDA__: quando $z = \bar{z}$?

$z = \bar{z} \Leftrightarrow b = 0$

identifichiamo i numeri complessi con $b=0$ con l'insieme dei numeri reali.

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Se $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a = 0$ e chiamiamo questi elementi numeri immaginari puri.

<u>N.B</u> In $\mathbb{C}$ dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_1 = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

cioè $\overline{}$ é un automorfismo di $\mathbb{C}$.

Teorema spettrale.

Sia A una matrice quadrata reale e simmetrica.
Allora $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ cioè ogni autovalore di A è reale.

DIM:
Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ e sia X un autovettore di autovalore λ.

Calcoliamo

$$\bar{\lambda}\, {}^t\bar{X} \cdot X = {}^t\overline{(AX)} \cdot X =$$

perché coniugio è automorfismo $= {}^t\bar{X}\, {}^t\bar{A}\, X =$

perché A è reale e quindi $A = \bar{A}$ $= {}^t\bar{X}\, {}^tA X =$ perché $A = {}^tA$

$$= {}^t\bar{X} A X =$$

$$= {}^t\bar{X} \lambda X = \lambda\, {}^t\bar{X} X$$

osserviamo che $X \neq \underline{0}$

in particolare se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$${}^t\bar{X}X = x_1 \cdot \bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n$$

ma $x_j\bar{x}_j > 0$ se $x_i \neq 0$

perché se $x_j = a_j + ib_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_j\bar{x}_j = (a_j + ib_j)(a_j - ib_j) =$$

$$= a_j^2 - (i)^2 b_j^2 =$$

$$= a_j^2 + b_j^2 \quad \text{con } a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow {}^t\bar{X}X \neq 0$ e quindi da

$$\lambda\, {}^t\bar{X}X = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{X}X \text{ segue}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \qquad \square$$

In realtà tutti gli autovalori sono anche regolari.

$$\begin{bmatrix} 7 & \sqrt{2} & 5 \\ \sqrt{2} & 11 & -6 \\ 5 & -6 & 32 \end{bmatrix}$$