OSSERVAZIONE.

L'insieme di tutte le equazioni di primo grado nelle incognite $(x_1 \dots x_n)$ su di un campo $\mathbb{K}$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione $n+1$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{1i}, b_1 \in \mathbb{K}$$

$$\alpha * (\qquad\qquad) = (\alpha a_{11})x_1 + \dots + (\alpha a_{1n})x_n \pm \alpha b_1$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$+$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$(a_{11} + a_{21})x_1 + \dots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2$$

sono somma e prod. per scalare delle righe della matrice completa del sistema.

Teorema: Sia $\mathcal{E}$ un insieme di equazioni di I grado nelle incognite $(x_1 \dots x_n)$ sul campo $\mathbb{K}$.

Indichiamo con $S(\mathcal{E})$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare formato dalle eq. di $\mathcal{E}$.

ALLORA $\boxed{S(\mathcal{E}) = S(\mathcal{L}(\mathcal{E}))}$

<u>DIM</u>: 1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{E})$

in particolare se

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ é soluzione di

tutte le equazioni in $\mathcal{L}(\mathcal{E})$

sará anche soluzione di tutte

le equazioni in $\mathcal{E}$.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $S(\mathcal{L}(\mathcal{E})) \subseteq S(\mathcal{E})$.

2) Supponiamo di avere 2 equazioni

$$(*) \begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \\ a_1'x_1 + \dots + a_n'x_n = b' \end{cases}$$

e che $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ sia soluzione di entrambe

$\Rightarrow$ mostriamo che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è anche soluzione di

$$\alpha(a_1x_1 + \dots a_nx_n = b) +$$
$$\beta(a_1'x_1 + \dots + a_n'x_n = b') \quad = \Delta$$

(da questo segue che le soluzioni di $\mathcal{E}$ sono soluzioni di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ perché gli elementi di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ sono c. lineare delle eq. di $\mathcal{E}$).

OSSERVIAMO CHE

Δ é

~~vettori~~

$(\alpha a_1 + \beta a_1')x_1 + \dots + (\alpha a_n + \beta a_n')x_n =$

$b + b'$.

sostituiamo ad $(x_1 \dots x_n)$ la soluzione $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \Rightarrow$

$(\alpha a_1 + \beta a_1')\alpha_1 + \dots + (\alpha a_n + \beta a_n')\alpha_n \overset{?}{=} \alpha b + \beta b'$

$\alpha[\underbrace{a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n}_{= b}] + \beta[\underbrace{a_1'\alpha_1 + \dots + a_n'\alpha_n}_{= b'}] =$ $\alpha b + \beta b'$

$\alpha b + \beta b' = \alpha b + \beta b'$ $\square$

- Supponiamo di avere un sistema lineare compatibile

$$AX = B$$

- NOI POSSIAMO COSTRUIRE UN NUOVO SISTEMA LINEARE

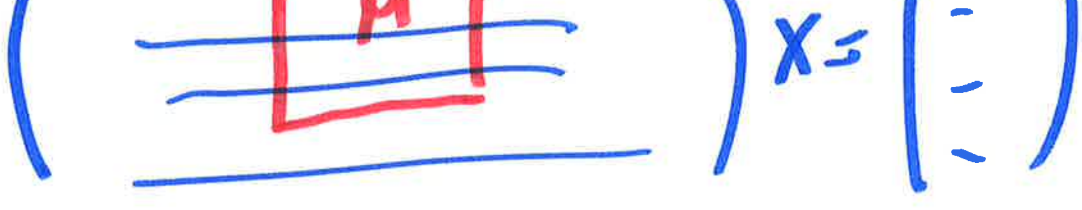
$$A'X = B'$$

che ha esattamente le stesse soluzioni di $AX = B$ ed in cui le righe di $(A'|B')$ sono una base dello spazio vettoriale generato dalle righe di $(A|B)$.

In particolare:

Sia $AX = B$ compatibile

$A \in \Bbbk^{m,n}$ e $rk(A) = t < m$



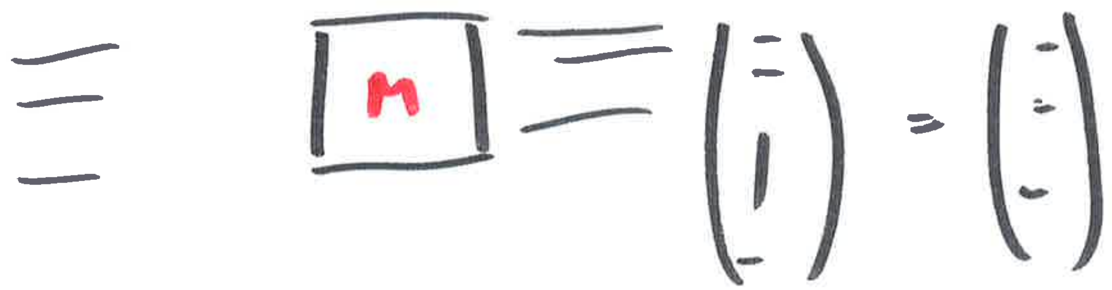
$\Rightarrow \exists$ in A un minore fond. M con $\det M \neq 0$
e $M \in \Bbbk^{t,t}$

Ma le righe intercettate da M generano lo sp. vett. delle righe di $(A|B)$

$\Rightarrow$ in particolare possiamo tenere solo le equazioni intercettate da M

$\Rightarrow$ otteniamo un nuovo sistema equivalente a quello dato del tipo $(A'|B')$ con $A' \in \mathbb{K}^{t,n}$

Risoluzione con Gauss-Jordan.



Il minore M contiene m righe che sono indip. $\Rightarrow$ una base di $\mathbb{K}^m$

$\Rightarrow$ MANIPOLANDO LE RIGHE POSSIAMO OTTENERE UN NUOVO SISTEMA

IN CUI LE "SOTTORIGHE" IN M
SONO PROPRIO LA BASE CANONICA
DI $\mathbb{K}^m$

$\Rightarrow$ A QUEL PUNTO ABBIAMO
RISOLTO IL SISTEMA:

TENIAMO LE INCOGNITE CHE
CORRISPONDONO ALLE COLONNE
DI M COME TALI E TRASFORMIA-
MO LE ALTRE IN PARAMETRI!

$$I \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} = B + x_{j_1} \cdots$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 = 3 \\ \qquad x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 6+4x_4$

$x_2 = -1 - x_4$

$x_3 = 1 - 3x_4$

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX = B$ è sottospazio vettoriale $\iff B = \underline{0}$ cioè il sistema è omogeneo.

Dato un sottospazio vettoriale, come fare a trovare un sistema di equazioni che lo descrive.

In $\mathbb{R}^5$: $\mathcal{L}((1\,2\,0\,1\,0),(0\,1\,0\,0\,0))$

un vettore $(x_1 \_\_\_ x_5) \in \mathcal{L}(\_\_\_)$

$$\iff rk\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_3 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_5 = 0$$

$x_3 = 0 \quad x_4 - x_1 = 0 \quad x_5 = 0$

Matrici di cambiamento di base e rappresentazione delle appl. lineari $V \to V$

Sia $V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di $V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow \forall \bar{v} \in V \ \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n .$$

Siano $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ due basi.

che legame c'è fra

$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \qquad (\alpha_1' \dots \alpha_n') \in \mathbb{K}^n$

tali che

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \alpha_1' \bar{e}_1' + \dots + \alpha_n' \bar{e}_n'$$

poniamo

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$
$$\bar{e}'_2 = a_{21}\bar{e}_1 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

vettori di $\mathcal{B}'$ scritti in componenti rispetto la base $\mathcal{B}$

$${}^tE' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{pmatrix} \qquad A = ((a_{ij})) \qquad {}^tE = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}$$

$${}^tE' = A\,{}^tE$$

matrice di cambiamento di base.

$$\bar{v} = x'_1\bar{e}'_1 + \dots + x'_n\bar{e}'_n = (x'_1 \dots x'_n)\,{}^tE'$$
$$= X'\,{}^tE'$$

$$\bar{v} = X'\,{}^{T}E' = X'A\,{}^{T}E$$

$\bar{v} = X\,{}^{T}E$ ove $X = (x_1 \dots x_n)$

sono le componenti di $\bar{v}$

rispetto a $\mathcal{B}$

$$X\,{}^{T}E = X'A\,{}^{T}E$$

le componenti devono essere uguali perché $\mathcal{B}$ base

$\Rightarrow X = X'A$ o come si

scrive più usualmente

$$\boxed{{}^{T}X = {}^{T}A\,{}^{T}X'}$$

matrice che ha per colonne le comp. dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$

vettore colonna componenti rispetto $\mathcal{B}'$

vettore colonna componenti rispetto a $\mathcal{B}$

N.B.: $\det(A) \neq 0$ perché le sue righe rappresentano una base!

(o, altra motivazione, così come $\exists A$ di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ c'è anche A^{-1} di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ e la matrice di "cambiamento di base" da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ è quella identica)

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di dim $= n$ sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f: V \to V$ una applicazione lineare. Fissiamo $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base di $V(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ f é rappresentata rispetto a $\mathcal{B}$ da una matrice quadrata $n \times n$

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$f(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{e}_1 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

posta $A = ((a_{ij}))$ il vettore $f(\bar{v})$ ove $\bar{v}$ ha componenti $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispetto ad $\mathcal{B}$ ha componenti AX

$\rightarrow$

$$f : \bar{v} \longrightarrow f(\bar{v})$$

$$X \longrightarrow AX$$

Sia $\mathcal{B}'$ una altra base di $V(\mathbb{K})$

che legame c'è fra la matrice A che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$ e la matrice A' che rappresenta f rispetto $\mathcal{B}'$

Sia P la matrice di cambiamento di base $\Rightarrow$ $X = {}^{T}P\,X'$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\text{comp. di } \bar{v} \text{ rispetto } \mathcal{B} \arrow[r] & \boxed{A} \arrow[r] & \text{componenti di } f(\bar{v}) \text{ rispetto } \mathcal{B} \arrow[d, "{}^{T}P^{-1}"] \\
\text{comp. di } \bar{v} \text{ rispetto } \mathcal{B}' \arrow[u, "{}^{T}P"] & & \text{comp. di } f(\bar{v}) \text{ rispetto } \mathcal{B}'
\end{tikzcd}
$$

$X = {}^{T}P\,X'$

$X' = {}^{T}P^{-1}\,X$

$$X' \longrightarrow {}^TP X' \longrightarrow A\,{}^TP X'$$

rispetto $\mathcal{B}'$ — rispetto a $\mathcal{B}$ — rispetto a $\mathcal{B}$

$$\longrightarrow {}^TP^{-1} A\,{}^TP X'$$

rispetto $\mathcal{B}'$

$$\boxed{A' = {}^TP^{-1} A\,{}^TP}$$

matrice di f rispetto $\mathcal{B}'$

Def: due matrici $A', A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono dette simili se $\exists\, B \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$\boxed{A' = B^{-1} A B}$$

ovvero $BA' = AB$

OSS 1) La relazione "essere matrici simili" è una relazione di equivalenza sull'insieme delle matrici $n \times n$.

- riflessiva: $A \approx A$ infatti

$$IA = AI$$

con I matrice identica

- simmetrica $A \approx B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists C \in GL(n, \mathbb{K}):$$

$$B = C^{-1} A C$$

$$\Rightarrow A = C B C^{-1} =$$

$$= D^{-1} B D$$

con $D = C^{-1}$

- Transitiva: $A \approx B$, $B \approx C$

$$\Rightarrow A = P^{-1} B P \qquad B = Q^{-1} C Q$$

$$\Rightarrow A = P^{-1}(Q^{-1} C Q) P = (P^{-1} Q^{-1}) C (QP)$$

$= (QP)^{-1} C (QP) \Rightarrow A \approx C$

$\square$

2) matrici simili corrispondono ad uno stesso endomorfismo ($=$ appl. lineare $V \to V$) rispetto basi differenti.

<u>Def</u>: Sia $f : V \to V$ lineare.
Un vettore $\bar{v} \in V$ è detto <u>autovettore</u> per f se $\bar{v} \neq \underline{0}$ ed $\exists\, \lambda_{\bar{v}} \in \mathbb{K}$ tale che

$$f(\bar{v}) = \lambda_{\bar{v}} \bar{v}$$

Supponiamo $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V composta da autovettori per f
$\Rightarrow$ la matrice che rappresenta f rispetto tale base è diagonale.

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

$\uparrow$

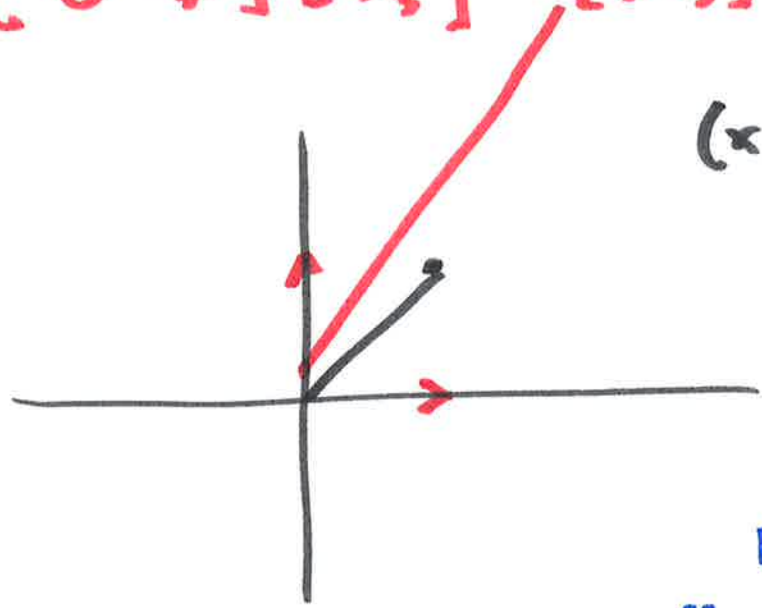
autovettori

$\Rightarrow f(\bar{v}_1) = \lambda_1 \bar{v}_1 \quad f(\bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_2 \dots$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_2 \\ 7x_3 \end{bmatrix}$$

$(x, y) \rightarrow (2x, 3y)$



Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$; un vettore non nullo $X \in \mathbb{K}^{n,1} \setminus \{0\}$ è detto autovettore per A se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $AX = \lambda X$

Def: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta <u>diagonalizzabile</u> se $\mathbb{K}^{n,1}$ ammette una base di autovettori per A

equivalentemente:
se A è simile ad una matrice diagonale, cioè
$\exists P$ tale che $AP = PD$
con $P \in GL(n, \mathbb{K})$, D matrice diagonale.

(ovvero $D = P^{-1}AP$)

<u>oss</u>: la matrice P di cui sopra è una matrice che ha per colonne gli autovettori di A che formano la base.

Sia A diagonalizzabile $\Rightarrow$

$\exists P$ invertibile e D diagonale

tali che $AP = PD$

scriviamo ${}^tP_1 \dots {}^tP_n$ per le colonne di P e $\lambda_1 \dots \lambda_n$ per le entrate sulla diagonale di D.

$$\Rightarrow AP = A\left({}^tP_1 \dots {}^tP_n\right) =$$

$$= \left(A\,{}^tP_1 \dots A\,{}^tP_n\right) = \left(\lambda_1 {}^tP_1 \dots \lambda_n {}^tP_n\right)$$

$$\Rightarrow A\,{}^tP_i = \lambda_i {}^tP_i$$

(quindi se ~~$\exists P$ abbiamo che~~ A diag. $\Rightarrow \exists$ base di autovettori).

viceversa se $\exists$ base di autovettori

$\Rightarrow$ costruiamo P mettendo i vett. in colonna $\Rightarrow$ come sopra si vede.

che é $AP=PD$ da cui

A diagonalizzabile.

1) Quando A é diagonalizzabile?

2) Come fare a trovare una matrice diagonale simile ad A se A é diag?

Def: Se A é diag., la matrice P tale che $AP=PD$ é detta matrice diagonalizzante per A.

1) $\det(P) \neq 0$

2) La matrice P e la matrice D sono legate fra loro!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\exists X : \quad AX = \lambda X$$

$X \neq \underline{0}$

$$(A - \lambda I)X = \underline{0}$$

deve avere soluzioni non banali.

$\Rightarrow$ deve non essere di Cramer

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

AUTOVALORI

$\forall \lambda$ autovalore risolve

$$(A - \lambda I)X = \underline{0}$$

autospazi.