Teorema

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Allora le righe di A sono linearm. indipendenti $\Leftrightarrow$ la matrice A contiene un minore $M \in \mathbb{K}^{m,m}$ con $\det M \neq 0$.

→ **DIM** Si completano le righe di A a base di $\mathbb{K}^n$ con vettori della base canonica.

$$
\begin{array}{c}
\left.\begin{matrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right] m \\
\begin{matrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{matrix}
\end{array}
$$

In particolare così si trovano le colonne volute.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

sono da cancellare le colonne

4,5,6

$\Rightarrow$ per avere una base aggiungo

$\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6$.

<u>**Teorema:**</u> Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Allora

$$rk(A) = \dim \mathcal{L}(C_A) = \dim \mathcal{L}(R_A)$$

ove $\mathcal{L}(C_A) \leq \mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A

$\mathcal{L}(R_A) \leq \mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A.

DIM:

Sia $rk(A)=k \Rightarrow$ esiste in A un minore M $k\times k$ con $\det(M)\neq 0$

$\Rightarrow$ le righe intercettate da M in A generano uno s.vett. di dim $=k$ (per il teorema precedente).

Se $\dim \mathcal{L}(R_A) > k \Rightarrow$ esisterebbe una riga in A l. indip. dalle righe intercettate da M $\Rightarrow$ aggiungendo tale riga alle precedenti si avrebbero $k+1$ righe indip. $\Rightarrow$ per il lemma/teorema precedente un minore $(k+1)\times(k+1)$ con $\det\neq 0$ $\Rightarrow$ ASSURDO ↯ perché $rk(A)=k$.

Viceversa se $\dim \mathcal{L}(R_A)=k \Rightarrow$ prendiamo una base di $\mathcal{L}(R_A)$ e osserviamo che nella matrice così costruita c'è un minore $k\times k$ con $\det\neq 0 \Rightarrow rk(A)\geq k \Rightarrow rk(A)=k$ □

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 7 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{matrix} \qquad rk(A)=3 \qquad \in \mathbb{K}^{5,7}$$

$\dim \mathcal{L}(R_A) = 3$

Quanti minori 4x4 vanno considerati?

$$\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{4} =$$

$$\frac{7!}{3!\,4!}\cdot\frac{5!}{1!\,4!} = \qquad \frac{5!}{4!} = 5$$

$$= \frac{7\times \cancel{6}\times 5\times \cancel{4\times 3\times 2\times 1}}{3\times 2\cdot \cancel{4\times 3\times 2}} = 35\cdot 5 = 175$$

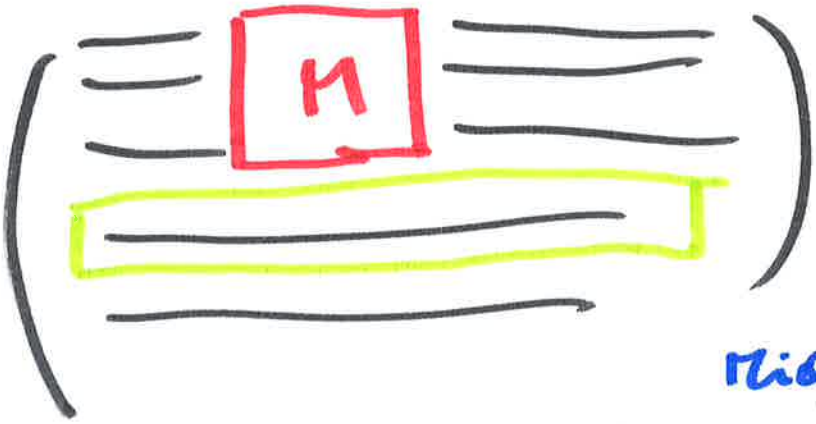
BASTA CONSIDERARNE $2\cdot 4 = 8$

Teorema (degli orlati).

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Allora A ha rango k se $\exists\, M \subseteq A$ con $M \in \mathbb{K}^{k,k}$, $\det M \neq 0$ e ogni minore $(k+1)\times(k+1)$ di A che contiene M ha $\det = 0$.

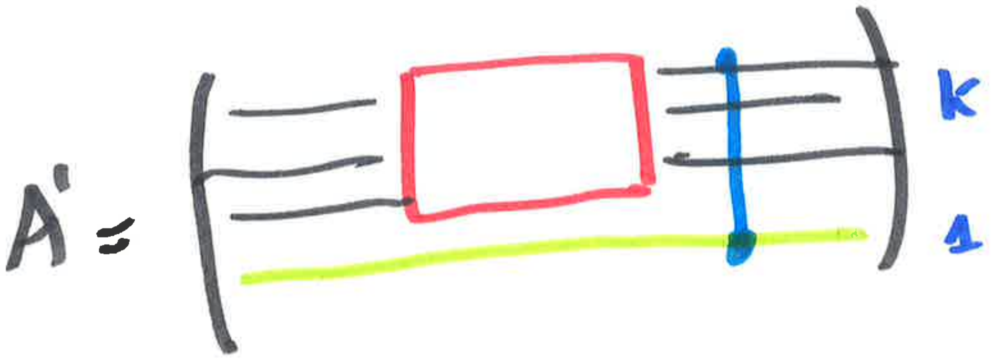
<u>DIM</u>: Se $rk(A) = k \Rightarrow$ ogni minore $(k+1)\times(k+1)$ ha $\det = 0$; in particolare quelli che contengono $M \Rightarrow$ FINE.

Altrimenti supponiamo $rk(A) > k$ e $\forall$ minore M' $(k+1)\times(k+1)$ che contiene M si ha $\det M' = 0$

$A =$ 

in particolare $\dim \mathcal{L}(R_A) \geq k+1$ quindi $\exists$ una riga che si può aggiungere alle righe di M ed è linear. indip. da esse.

consideriamo la matrice A'
estratta da A che ha come
righe le righe di M + la
riga aggiunta e come colonne
le colonne corrispondenti



$rk(A') = \dim \mathcal{L}(R_{A'}) = k+1 =$

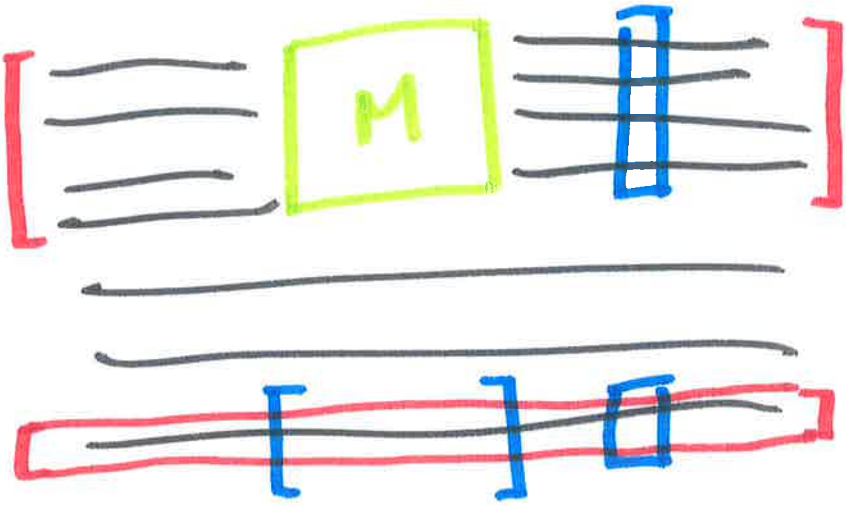
$= \dim \mathcal{L}(C_{A'})$ e le colonne

intercalate da M sono k e lin. indip.

Trovato una colonna di A' che aggiunta
alle colonne di M dia una base di
$\mathcal{L}(C_{A'})$.

Ma avevo avere proprio un orlato di M

con $\det \neq 0$. y □



$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{array}$$

$rk = 3$

Studio dei sistemi lineari

Sistema lineare

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni di primo grado
n incognite

→ Soluzione di $(*)$ é un elemento $(\alpha_1 — \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituendo agli x_i i valori α_i tutte le equazioni sono contemporaneamente soddisfatte.

$(*)$ é detto compatibile se esso ammette almeno una soluzione

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=2 \end{cases}$$

COMPATIBILE

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

NON COMPATIBILE

DOMANDE

1) il sistema è compatibile?

2) quante soluzioni ha?

3) troviamo le soluzioni.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice dei coeff.
o matrice incompleta
del sistema

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vettore dei
termini noti.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vettore delle incognite.

→ Il sistema si può scrivere in forma matriciale come

$$AX = B$$

vogliamo scoprire se il sistema è compatibile.

osserviamo che la funzione

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

1) è una funzione lineare.

2) Il sistema è risolubile $\Longleftrightarrow B \in \mathrm{Im}\, f_A$

Infatti $AX = B \Longleftrightarrow f_A(X) = B$

ma $\operatorname{Im} f_A$ è generata dalle colonne della matrice A.

Il sistema è compatibile $\Longleftrightarrow$

$$B \in \operatorname{Im} f_A$$

$$\Longleftrightarrow B \in \mathcal{L}(C_A)$$

$\Longleftrightarrow$ B è legato rispetto le colonne di A

cioè $\mathcal{L}(C_A \cup \{B\}) = \mathcal{L}(C_A)$

$$\Longleftrightarrow \dim \mathcal{L}(C_A \cup \{B\}) = \dim \mathcal{L}(C_A)$$

$$\Longleftrightarrow rk(A|B) = rk(A)$$

ove $A|B$ = matrice completa del sistema = matrice che si ottiene aggiungendo B alle colonne di A

Teorema (Rouché-Capelli).

1) Un sistema lineare
$$AX = B$$
è compatibile $\iff rk(A) = rk(A|B)$.

2) Quante sono le soluzioni di un sistema lineare compatibile?

→ chiedersi quante sono le preimmagini di B rispetto $f_A(X)$

$$f_A(X) \qquad AX = f_A(X) = B$$

NOI SAPPIAMO CHE LE PREIMMAGINI DI B devono essere tutte e sole della forma $\overline{X} + Z$ con $Z \in \operatorname{Ker} f_A$

~~e che~~ In particolare le preimmagini saranno un insieme del tipo

$$\bar{X} + \operatorname{Ker} f_A = \{\bar{X} + z \mid z \in \operatorname{Ker} f_A\}.$$

DICIAMO CHE IL SISTEMA HA

∞^t

SOLUZIONI OVE $t = \dim \operatorname{Ker} f_A$

in quanto le soluzioni dipendono da t parametri.

DI PIÙ: $t = \operatorname{null} f_A = \dim \operatorname{Ker} f_A$

per il teorema nullità + rango.

$$\underbrace{\operatorname{null} f_A}_{t} + \underbrace{\operatorname{rk} f_A}_{= \operatorname{rk}(A)} = n$$

dim dominio

le soluzioni sono $\infty^{n - \operatorname{rk}(A)}$

con n = numero incognite.

SOLUZIONI

$AX=B$ compatibile.

Siano $\bar{X}, \bar{y}$ due soluzioni

$$\Rightarrow \quad A\bar{X}-A\bar{y} = B-B = \underline{0}$$

$$\shortparallel$$

$A(\bar{X}-\bar{y})$ e quindi

$\bar{X}-\bar{y}$ risolve il sistema omogeneo associato

$$AX=\underline{0}$$

o, detto in termini di f_A

abbiamo $f_A(\bar{X}-\bar{y})=\underline{0}$

cioé $\bar{X}-\bar{y} \in \ker f_A$

viceversa: sia $\bar{X}$ soluzione di $AX=B$ e

Z soluzione di $AX=\underline{0}$

$$\Rightarrow \quad A(\bar{X}+Z) = A\bar{X}+AZ = B+\underline{0} = B$$

quindi $\bar{X}+Z$ é soluzione.

detto in alltre parole

se $\bar{X}$ é una preimm. di B

$Z \in \operatorname{Ker} f_A$

$\Rightarrow \bar{X}+Z$ é una preimm. di B.

Le soluzioni di $AX=B$ si scrivono come

$$S = \{\bar{X}+Z \mid Z \in \operatorname{Ker} f_A\}.$$
$$= \bar{X} + \operatorname{Ker} f_A .$$

<u>N.B</u> l'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare compatibile $AX=B$ é s.vettoriale $\Leftrightarrow B=\underline{0}$ cioé il <u>sistema é omogeneo</u>

<u>DIM</u>: Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin S$ e quindi S non é sottospazio.

$B=\underline{0} \Rightarrow S = \operatorname{Ker} f_A \leq \mathbb{K}^n$

$\square$

$$\begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ x+y+z \qquad = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=-1 \\ x=2-y-z \end{cases}$$

$4-2=2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$S=\{(2-y-z,\ y,\ z,\ -1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=(2\ 0\ 0\ -1)+\{(-y-z,\ y,\ z,\ 0) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=\underline{(2\ 0\ 0\ -1)}+\mathcal{L}(\underline{(-1\ 1\ 0\ 0),(-1\ 0\ 1\ 0)})$$

N.B: Per vedere se un sistema lineare è compatibile e/o scoprire quante soluzioni ha, non serve risolverlo.

Consideriamo il sistema lineare

$$AX = B \quad \text{con} \quad A \in GL(n, \mathbb{K}).$$

A matrice $n \times n$ invertibile.

$\Rightarrow \exists A^{-1}$ matrice inversa di

A e quindi

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

Trovare la soluzione calcolando

$$A^{-1}B$$

→ SISTEMA DI CRAMER

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists!$ soluzione.

NON SCRIVERE BA^{-1} (non esiste)

E NEMMENO $X = B/A$ (il prod. di mat non é commutativo)

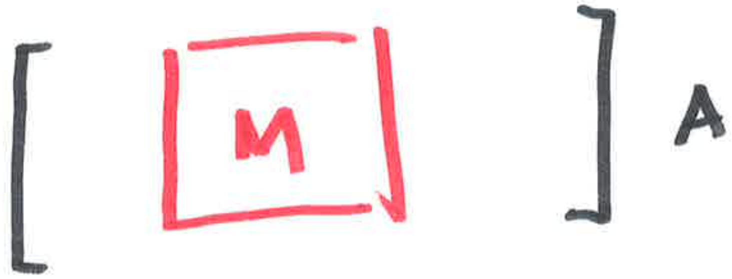
Consideriamo un sistema lineare

$AX = B$ con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $rk(A) = m$

m equazioni

n incognite $rk(A) = m$

$\Rightarrow$ anche $rk(A|B) = m$



individuate in A un minore M (minore fondamentale) con

$M \in \mathbb{K}^{m,m}$ e $\det M \neq 0$

Thm Considerate le incognite che corrispondono alle colonne di A non intercettate da M come parametri e le spostate a dx dell'uguale; risolvete poi il sistema come se fosse di Cramer

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & t \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 2 - x - t \\ 2y = 0 - x \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 2-x-t \\ 2 & 0 & 0-x \end{array}\right]$$

A' B'

Sistema di Cramer in y e z con parametri x, t

$$A' \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = B' \qquad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = A'^{-1} B'$$

questo ci mostra anche che

$\cancel{rk}$ $\dim \operatorname{Ker} f_A = n - rk(A)$

La dimensione del ker f_A è proprio uguale al numero di colonne portate a dx e quindi al numero di parametri da cui dipende il sistema.

3) $AX = B$ con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

$rk(A|B) = k(A) = k < m$