I Teorema di Laplace

$$\det A = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad \forall j$$

$A \in \mathbb{K}^{1,1} \quad A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$

<u>OSS</u>: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ le colonne (le righe) di A sono una base di $\mathbb{K}^n$

- $\det(A) = \det({}^tA)$
- Teorema di Binét
  se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$

<u>OSS</u>: calcolare $\det A$ con Laplace richiede $n!$ operazioni ove $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

OSS: Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é triangolare sup.

$$\Rightarrow \det(A) = \prod_i a_{ii}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11} \cdots a_{nn}$$

ALGORITMO: possiamo trasformare una matrice A in una matrice A' con A' triangolare superiore mediante operazioni che non cambiano il determinante? Sí

↓

servono circa n^2 operazioni.

→ usare trasformazioni elementari sulle righe.

1) Scambiare una riga con un'altra riga cambiata di segno

2) Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 9-42 \end{vmatrix} =$$

$$= -33$$

ALG ricorsivo.

Sulla riga i per $i = 1 \dots n$
vogliamo entrata $a_{ii} \neq 0$ e
poi sottraiamo da tutte le righe
successive il multiplo $a_{ji} a_{ii}^{-1} R_i$
$j > i$.

Se non è possibile avere $a_{ii} \neq 0$
nemmeno scambiando le righe
$\Rightarrow \det A = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

OSS: Una matrice A è invertibile
cioè $\exists$ B tale che $AB = I_n$
$\Leftrightarrow$ le colonne (righe) di A
sono lin. indip.

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$

II Teorema di Laplace

Sia $A \in K^{n,n}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ik}| = \begin{cases} \det A & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

<u>DIM:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ik}| = \det A'$$

~~ove la colonna riga k-esima di A è sostituita in A' con la colonna j-esima di A. Cioè se k≠j ⇒ A' ha 2 colonne uguali ⇒ det A' = 0. □~~

la colonna j esima appare 2 volte. □

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \\
j=1 & & k=3 &
\end{array}
$$

$$
\sum (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i3}| =
$$

$$
= 1 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
- 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = 0
$$

$\square$

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Chiamiamo complemento algebrico nella posizione (i,j) di A

$$\boxed{\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}|}$$

matrice aggiunta di A

$$A^a := ((\Gamma_{ij}))_{i,j=1}^{n}$$

Teorema

$$A\,{}^T\!A^a = (\det A)\, I_n$$

$\Rightarrow$ se $\det A \neq 0$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^T\!A^a$

DIM

l'entrata (i,j) in $A\,{}^T\!A^a$ é

data da

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{j1} \\ \Gamma_{j2} \\ \vdots \\ \Gamma_{jn} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} a_{it} \Gamma_{jt} = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{j+t} a_{it} |A_{jt}|$$

e se $j \neq i \Rightarrow$ questo é 0 per laplace

II ; se $j = t$ é proprio $\det(A)$ $\square$

per matrici arbitrarie $\rightarrow$ algoritmo di

<u>Gauss</u>

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} {}^tC_1 & & {}^tC_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} {}^tD_1 & \dots & {}^tD_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \end{array} = I_n$$

invertibile $\Leftrightarrow$
le colonne di A
sono una base
di $\mathbb{K}^n$

I coeff. in D_i sono esatt. quelli della comb. lineare delle colonne di A che danno il vettore $\overline{e}_i$ della base canonica.

Idea: calcolare direttamente la combinazione lineare che dia il vettore voluto.

partiamo da 2 matrici

$$A \qquad\qquad I_n$$

applichiamo trasf. elementari contemporaneamente ad A (per arrivare alla matrice identica) e ad I.

$\Rightarrow$ alla fine otteniamo due matrici

$$I \qquad\qquad A^{-1}$$

descrizione delle trasformazioni

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ragionare per righe <u>o</u> per colonne ma <u>non</u> per righe <u>e</u> per colonne

$$A^{-1}A = I$$

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11} \neq 0 \Rightarrow$ dividere la I riga per a_{11}

DA OGNI RIGA SEGUENTE SOTTRAETE $a_{i1} R'_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

DIVIDERE II riga per a'_{22} e sottrarre da tutte le altre righe $a_{j2} R_2''$ di modo da avere

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array}\right]$$

Det introdotto (anche) per vedere quando n vettori in $\mathbb{K}^n$ sono base.

Se di vettori ne abbiamo $t<n$?

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Si dice rango di A l'ordine massimo dei minori quadrati di A con det $\neq 0$.

$$rk(A) = \max\{t \mid \exists B \in \mathbb{K}^{t,t} ; B \subseteq A \ \det B \neq 0\}.$$

Teorema: Siano dati k vettori di $\mathbb{K}^n$. Allora questi k vettori sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ la matrice che li ha per righe (colonne) contiene un minore $k \times k$ con determinante $\neq 0$.

[Si dice che la matrice ha rango pieno].

DIM

$$\begin{matrix} [v_{11} & \dots & v_{1n}] \\ [v_{21} & \dots & v_{2n}] \\ \vdots & & \\ [v_{k1} & \dots & v_{kn}] \end{matrix}$$

se i vettori sono lin. dip.

$\Rightarrow$ almeno uno di essi é c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$

abbiamo una matrice $\in \mathbb{K}^{k,n}$ in cui una riga é c. lineare delle altre e quindi ogni minore $k \times k$ (ottenuto cancell. $n-k$ colonne) conterrá una riga c. lineare delle altre

$\Rightarrow$ avrá det $= 0$.

Supponiamo ora che i vett. siano liberi:

$$\begin{array}{c}
\left.\begin{matrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kn} \end{matrix}\right] k \\
n-k \left[\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 & 0 \\ \cdots & & & \end{matrix}\right.
\end{array}$$

possiamo completarli a base con $n-k$ vettori della base canonica.

mettiamo tutto a matrice e abbiamo una matrice $n \times n$ con $\det \neq 0$ perché le righe sono base.

→ calcoliamo det con Laplace a partire dall'ultima riga.

$$\det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & & & & \\ v_{k1} & v_{k2} & v_{k3} & \cdots & v_{kn} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} = \pm \det$$

di una matrice ottenuta cancellando le ultime $n-k$ righe e $n-k$ colonne =

$\pm \det$ di un minore $k \times k$ delle prime k righe.

$\neq 0$

$\square$