

Rappresentazione di una appl.
lineare da $V_n(K) \rightarrow V_m(K)$
mediante matrici.

Se $f: K^n \rightarrow K^m$ e si fissano le
rispettive basi canoniche $\Rightarrow$
la matrice che rappresenta f
è la matrice che ha per colonne
le immagini dei vettori della
base canonica di K^n

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

$$f(100) = (31023)$$

$$f(010) = (00100)$$

$$f(001) = (31323)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se $f: V_n(K) \rightarrow V_m(K)$ lineare

si dice nullità di f

$$\text{Null}(f) := \dim \text{Ker}(f)$$

rank di f

$$\text{rk}(f) := \dim \text{Im}(f)$$

oss: Se $f: K^n \rightarrow K^m$ allora

l'immagine di f è generata
dalle colonne della matrice che
rappresenta f

[$\text{rk}(f) = \dim$ dello spazio
vettoriale generato dalle
colonne di f]

Teorema "nullità + rango"

$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ lineare

$$\text{Null}(f) + \text{Rk}(f) = n$$

$\text{DIM KER} + \text{DIM IM}$
 $= \text{DIM DOMINIO}$

DIM

Sia $\text{Ker } f \leq \mathbb{K}^n$

e poniamo $l = \dim \text{Ker } f$

Sia $(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_l)$ una base
di $\text{Ker } f$.

Noi possiamo sempre completare
la base $(\bar{k}_1 \dots \bar{k}_l)$ di $\mathbb{K}^n$

aggiungendo $(n-l)$ vettori.

$B = (\bar{k}_1 \dots \bar{k}_l \bar{v}_1 \dots \bar{v}_{n-l})$ base
di $\mathbb{K}^n$

Facciamo vedere che $\text{Im}(f)$
è generata dalle immagini di $\bar{v}_1 \dots$

$\bar{v}_{n-e}$ e che queste immagini sono linearmente indipendenti.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Null}(f) = e \\ \text{Rk}(f) = n - e \end{array} \right] \Rightarrow \text{Null}(f) + \text{Rk}(f) = n$$

$$f\left(\sum_{i=1}^e a_i \bar{k}_i + \sum_{j=1}^{n-e} \beta_j \bar{v}_j\right) = f\left(\sum_i a_i \bar{k}_i\right) + f\left(\sum \beta_j \bar{v}_j\right)$$

$\uparrow$
 generico vett.
 di $\mathbb{K}^n$

$$= \underline{0} + \sum_{j=1}^{n-e} \beta_j f(\bar{v}_j)$$

$$\text{Im } f = \mathcal{L}(f(\bar{v}_1) \dots f(\bar{v}_{n-e}))$$

Supponiamo $\exists (\beta_1 \dots \beta_{n-e}) \neq \underline{0}$

$$\text{tale che } \sum_{j=1}^{n-e} \beta_j f(\bar{v}_j) = \underline{0}$$

||

$$\sum_j f(\beta_j \bar{v}_j) = f\left(\sum \beta_j \bar{v}_j\right)$$

DA ciò segue che $\sum \beta_j \bar{v}_j \in \ker f$

$\Rightarrow \sum \beta_j \bar{v}_j$ è c. lineare dei vettori $\bar{k}_i$

ASSURDO se almeno un $\beta_k \neq 0$
perché $(\bar{k}_2 - \bar{k}_e, \bar{v}_2 - \bar{v}_{n-1})$ è
libere □

- In generale consideriamo uno
s.vettoriale $V_n(K)$.

Si dice endomorfismo di $V_n(K)$
una applicazione lineare

$$f: V_n(K) \rightarrow V_n(K).$$

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $V_n(K)$

la applicazione $f: V_n(K) \rightarrow V_n(K)$
è rappresentata da una matrice
di $K^{n,n}$]

(viceversa: ogni matrice di $K^{n,n}$
rappresenta rispetto a $\mathcal{B}$ un endomorf.

di $V_n(K)$).

K^n con la base canonica

$$f_A : \overset{\uparrow}{\text{vettore}} X \mapsto A \overset{\uparrow}{\text{colonna}} X$$

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix}$$

In generale se f, g ^{sono} endomorfismi

$\Rightarrow$ potete considerare $f \circ g$ o

$g \circ f$ visto che hanno lo stesso dominio e codominio.

Se f è rapp. dalla matrice A
 g è rapp. dalla matrice B

$\Rightarrow (f \circ g)$ è rapp. dalla matrice AB

l'insieme di tutte le matrici
 $M^{n,n}(K)$

è un gruppo?

(equiv. l'insieme di tutte le funzioni
lineari $K^n \rightarrow K^n$ è un gruppo?)

No!!!

$$f: \begin{cases} K^n \rightarrow K^n \\ \bar{v} \rightarrow \underline{0} \end{cases}$$

sicuramente non è invertibile
se $n > 0$

In generale affinché f sia
invertibile ci basta che sia
tale che l'immagine di una
base di V_n sia una base di V_n

$$\rightarrow \dim(\text{Im } f) = n \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$$

equivalente a dire che le colonne di una qualsiasi matrice quadrata che rappresenta f devono essere linearmente indipendenti (perché devono generare uno spazio di dim $= n$).

$$GL(n, K) = \{ A \in K^{n,n} \mid \exists A^{-1} \in K^{n,n} \text{ con } AA^{-1} = I_n \}.$$

Come riconoscere se una matrice A è invertibile e, nel caso, invertirla.

↓
come testare se le colonne di una matrice quadrata sono linearmente indipendenti?

DETERMINANTE

Vogliamo una funzione

$$\det: \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ le colonne di A sono lin. dipendenti.

Vogliamo anche che sia "facile" da calcolare.

- $\det(I_n) = 1$ per definizione
- $\det(\overset{\uparrow}{\underset{\text{colonne}}{\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n}})$ deve essere tale che se ci sono 2 colonne uguali esso è sicuramente $= 0$

Imponiamo che

$$\det(\vec{c}_1 \dots \vec{c}_i \dots \vec{c}_j \dots \vec{c}_n) = 0$$

$$= -\det({}^T C_2 \dots {}^T C_j \dots {}^T C_i \dots {}^T C_n)$$

cioè che scambiando fra loro 2 colonne il segno della funzione cambia.

$$\det({}^T C_2 \dots \underbrace{{}^T C_i \dots {}^T C_j}_{=}) \dots {}^T C_n) =$$

$$= -\det({}^T C_2 \dots \underbrace{{}^T C_j \dots {}^T C_i}_{=}) \dots {}^T C_n)$$

3) Imponiamo che il determinante sia lineare in ogni singola colonna.

$$\det({}^T C_2 \dots \alpha {}^T C_i + \beta {}^T C'_i \dots {}^T C_n) =$$

$$= \alpha \det({}^T C_2 \dots {}^T C_i \dots {}^T C_n) + \beta \det({}^T C_2 \dots {}^T C'_i \dots {}^T C_n)$$

$$\text{Se } A({}^T C_2 \dots {}^T C_n) \text{ è legata} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

$$\text{se è libera} \Rightarrow \det A \neq 0$$

$$\det [{}^T C_1 \dots {}^T C_i \dots {}^T C_n] \text{ legata}$$

$${}^T C_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} {}^T C_j$$

$$\det [{}^T C_1 \dots \sum_{j \neq i} a_{ij} {}^T C_j \dots {}^T C_n] =$$

$$= \sum_j a_{ij} \det [{}^T C_1 \dots {}^T C_j \dots {}^T C_n] = 0$$

↑
matrici con
2 colonne
uguali!

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 1 \\ 2 & 2+1 & 1 \\ 3 & 3+1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

independent:

↓

$$[{}^T C_1 \dots {}^T C_n] \Rightarrow$$

in particolare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 {}^T C_1 + \dots + \alpha_n {}^T C_n$$

~~MA LA CORRETTA~~

supponiamo $\alpha_1 \neq 0$ poiché gli α_i
non sono tutti nulli.

$\Rightarrow$ possiamo vedere che
il det. della matrice

$$\det \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} {}^T C_1 \dots {}^T C_n = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 {}^T C_1 + \dots + \alpha_n {}^T C_n & {}^T C_2 & \dots & {}^T C_n \end{bmatrix}$$

per linearità

$$= \sum_i a_i \det \begin{bmatrix} {}^T C_1 & {}^T C_2 & \dots & {}^T C_n \end{bmatrix} =$$

per $i \neq 1$ ci sono colonne uguali!

$$= a_1 \det ({}^T C_1 \dots {}^T C_n)$$

$$\det ({}^T C_2 \dots {}^T C_n) = a_1^{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & {}^T C_2 & \dots & {}^T C_n \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e $a_1 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 {}^T C_2 + \dots + \beta_n {}^T C_n$$

$\beta_2 \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^T C_3 & \dots & {}^T C_n \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 {}^T C_2 + \dots + \beta_n {}^T C_n \right)$$
$$= \sum \beta_i \det \begin{pmatrix} 1 & {}^T C_1 & {}^T C_2 & \dots & {}^T C_n \\ 0 & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \beta_2 \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & {}^t C_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & {}^t C_n \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & {}^t C_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & {}^t C_n \end{pmatrix} = \beta_2^{-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & {}^t C_2 \\ & & \ddots & \\ & & & {}^t C_n \end{pmatrix}$$

Dopo n passaggi abbiamo

$$\det ({}^t C_2 \dots {}^t C_n) \text{ in}$$

$$\text{funzione di } \det(I_n) = 1$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \cancel{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sostituisco ed ottengo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$ se le colonne di A
sono lin. indep.

I Teoremi Laplace $A = ((a_{ij}))$

$$\forall j \quad \det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

ove A_{ij} = matrice ottenuta da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

e che questo valore non dipende da j .

$$\text{Inoltre } \forall i : \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$\text{con } |A_{ij}| = \det A_{ij}$$

$$\text{e } \det(a_{ii}) = a_{11}$$

$$A \in \mathbb{K}^{1,1} : A = (a_{11}), \det(A) = a_{11}$$

$$A \in \mathbb{K}^{n,n} : \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$A_{ij} \in \mathbb{K}^{n-1, n-1}$$

In particolare $|A| = |\tau A|$

n ≤ 4 si usa Laplace.

$$\det(a_{11}) = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

SOLO PER 3x3

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 \cdot (-44)$$

per calcolare $\det A$ con $A \in K^{n,n}$

vi serve calcolare n det. di

matrici $A_{ij} \in K^{(n-1),(n-1)}$

$\hookrightarrow$ di queste $(n-1)$ det. di matrici $(n-2) \times (n-2)$.

$n!$ determinanti $:-c$

Riduzione di Gauss (Gauss/Jordan).

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$19 \times 2 \\ = 38-4$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & -8 & -27 \end{bmatrix} =$$

$$+4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & -8 & -27 \end{bmatrix} =$$

$$= +4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \end{bmatrix} = 11 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CALCOLO DEL DETERMINANTE

Sia $A = ({}^T C_1 \quad {}^T C_2 \quad \dots \quad {}^T C_n)$

Ovviamente ${}^T C_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} {}^T e_i$ ove gli e_i sono vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$

Allora $\det(A) = \det({}^T C_1 \quad {}^T C_2 \quad \dots \quad {}^T C_n) =$
 $\det(\sum_{i_1=1}^n c_{i_1 1} {}^T e_{i_1} \quad \sum_{i_2=1}^n c_{i_2 2} {}^T e_{i_2} \quad \dots \quad \sum_{i_n=1}^n c_{i_n n} {}^T e_{i_n}) =$
 $\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n (c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_n n}) \det({}^T e_{i_1} \quad {}^T e_{i_2} \quad \dots \quad {}^T e_{i_n})$

In particolare se 2 indici $i_k = i_r$ sono uguali nelle sommatorie $\Rightarrow$ l'addendo è nullo.

Quindi le uniche somme non. que. le per cui

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}} (c_{i_1 1} c_{i_2 2} \dots c_{i_n n}) \det({}^T e_{i_1} \quad {}^T e_{i_2} \quad \dots \quad {}^T e_{i_n})$$

D'altro canto

$$\det({}^T e_{i_1} \quad {}^T e_{i_2} \quad \dots \quad {}^T e_{i_n}) = 1 \quad \text{se } (i_1 \dots i_n) \text{ si ottiene da } (1 \dots n) \text{ con un numero pari di scambi}$$

$$\det({}^T e_{i_1} \quad {}^T e_{i_2} \quad \dots \quad {}^T e_{i_n}) = -1 \quad \text{se } (i_1 \dots i_n) \text{ si ottiene da } (1 \dots n) \text{ con un numero dispari di scambi}$$

poniamo dunque $S_n =$ gruppo di tutte le permutazioni
(i.e. funzioni biettive)

$$\{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots n\}.$$

$$\forall \sigma \in S_n \quad \text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è ottenuto con un numero pari di scambi} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è ottenuto con un numero disp. di scambi} \end{cases}$$

Allora

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{\sigma(i)i}$$