Formula di Grassmann

$\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$

$$\dim \mathcal{U}+W = \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \mathcal{U}\cap W$$

$$\max(\dim \mathcal{U}, \dim W) \leq \dim \mathcal{U}+W \leq \min(\dim \mathcal{U} + \dim W, \dim V)$$

$$0 \leq \dim \mathcal{U}\cap W \leq \min(\dim \mathcal{U}, \dim W).$$

<u>Esercizio:</u> Siano $\mathcal{U}, W \leq \mathbb{R}^{3,5}$ con $\dim \mathcal{U} = 11$, $\dim W = 7$

Determinare le possibili dim di $\mathcal{U}+W$ e $\mathcal{U}\cap W$.

per quanto riguarda $\dim \mathcal{U}+W$

$$11 \leq \dim \mathcal{U}+W \leq \min(7+11, 15) = 15$$

In prima approssimazione: $0 \leq \dim \mathcal{U}\cap W \leq 7$

$$\dim \mathcal{U} \cap W \leq 7$$

$$\dim \mathcal{U} \cap W = \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \mathcal{U}+W$$
$$= 11 + 7 - \dim \mathcal{U}+W$$

con $\quad 11 \leq \dim \mathcal{U}+W \leq 15$

$$\underbrace{11+7-15}_{=3} \leq \dim \mathcal{U} \cap W \leq 11+7-11 = 7$$

$$0 \leq \boxed{3 \leq \dim \mathcal{U} \cap W \leq 7}$$

Trasformazione lineare.

Siano $\mathcal{U}, V$ due spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$.

Si dice <u>trasformazione lineare</u> una funzione $f : \mathcal{U} \to V$ tale che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathcal{U}$

$$f(\alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w})$$

→ é una funzione che manda combinazioni lineari in combin. lineari con i medesimi coeff.

↓

|| preserva le operazioni di spazio vettoriale

<u>OSS</u>: Sia $f: U \to V$ lineare
Allora $\mathrm{Im}(f) \leq V$

<u>DIM</u>: Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $f(\bar{u}), f(\bar{w}) \in \mathrm{Im}\, f$

$\Rightarrow \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{w}) = f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}) \in$
$\in \mathrm{Im}\, f$ perché $\alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in U$.

<u>Def</u>: $\mathrm{Ker}(f) := \{ \bar{u} \in U \mid f(\bar{u}) = \underline{0} \}$.

<u>Teorema</u>: f é iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\underline{0}\}$

- Inoltre in generale
se $f(\bar{u}) = \bar{v} \Rightarrow \forall \bar{x} \in \mathrm{Ker}\, f$:
$f(\bar{u} + \bar{x}) = \bar{v}$ e viceversa
se $f(\bar{u}) = f(\bar{w}) \Rightarrow \bar{u} = \bar{w} + \bar{x}$ con $x \in \mathrm{Ker}\, f$.

• $\mathrm{Ker}(f) \leq U$.

DIM:
1) Siano $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \underline{0}$$

$$\| $$

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})$$

e quindi $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = \underline{0}$.

2) Siano $\bar{x}, \bar{y} \in U$ tali che

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \underline{0}$$

$\Rightarrow (\bar{x} - \bar{y}) \in \mathrm{Ker}\, f$, cioé

$\exists\, \bar{z} \in \mathrm{Ker}\, f$ tale che

$$\bar{x} = y + \bar{z}$$

In particolare se $\mathrm{Ker}\, f = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} = \underline{0}$ cioé

$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow f$ é iniettiva

$\square$

Se f iniettiva $\Rightarrow \underline{0}$ ha un' unica preimm.

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\underline{0}\}$.

Def: $f: U \to V$ è detta <u>isomorfismo</u> se f è lineare e biiettiva.

In particolare se $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$ $\Rightarrow$ f è un isomorfismo fra U e $\operatorname{Im}(f)$.

Se due spazi sono isomorfi $\Rightarrow$ è equivalente lavorare nell'uno come nell'altro

$$f: U \longrightarrow V$$

$$\sum \alpha_i \bar{u}_i \longmapsto f\left(\sum \alpha_i \bar{u}_i\right) = \alpha_i \sum f(\bar{u}_i).$$

e f^{-1} manda c. lineari di vettori di V in c. lineari di vettori di U

f iniettiva $\Rightarrow$ l'immagine di una seq. libera di vettori è libera.

$$f(\alpha_1\bar{e}_1+\dots+\alpha_n\bar{e}_n)=\alpha_1 f(\bar{e}_1)+\dots+\alpha_n f(\bar{e}_n)$$

(*)

supponiamo che $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ sia libera e $\operatorname{Ker} f=\{\underline{0}\}$.

se $(f(\bar{e}_1)\dots f(\bar{e}_n))$ fosse legata $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_1\dots\alpha_n : \alpha_1 f(\bar{e}_1)+\dots+\alpha_n f(\bar{e}_n)=\underline{0}$ con gli α_i non tutti nulli

$\Rightarrow f(\alpha_1\bar{e}_1+\dots+\alpha_n\bar{e}_n)=\underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_1\bar{e}_1+\dots+\alpha_n\bar{e}_n \in \operatorname{Ker}(f)=\{\underline{0}\}$.

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ perché $(\bar{e}_1\dots\bar{e}_n)$ è libera ↯

f isomorfismo $\Rightarrow$ f manda basi in basi.

f manda seq. libere di
$\mathcal{U}$ in seq. libere di V ✓
seq. di generatori di
$\mathcal{U}$ in seq. di generatori di V

perché dovete avere che il generico vettore $\bar{v} \in V$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f)$ ma dunque se $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ é base di $\mathcal{U} \Rightarrow$
$f(\bar{e}_1), \dots f(\bar{e}_n)$ genera $\mathrm{Im}\, f$
e dunque deve anche generare V se f é suriettiva.

Conseguenza $f : \mathcal{U} \to V$ isomorfismo
$\Rightarrow \dim \mathcal{U} = \dim V.$

Vale anche il viceversa:
se $\dim \mathcal{U} = \dim V$
$\Rightarrow \exists f$ isomorfismo da $\mathcal{U}$ in V

OSS: Sia $f: U \to V$ una funzione lineare. Allora f è univoc. determinata dai valori che essa assume sui vettori di una base di U.

- $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

$$\Rightarrow f(\bar{u}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) =$$

$$= \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n)$$

- componenti di $\bar{u}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e i valori di $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)$ conoscete la funzione $f(\bar{u})$.

→ Se $\dim U = \dim W$

fissate una base $\mathcal{B}(U) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

e una base $\mathcal{B}(W) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n)$

Definite f lineare $f: U \to W$ come

$$f(\bar{e}_i) = \bar{g}_i$$

e questa è un isomorfismo con inversa $f^{-1}(\bar{g}_i) := \bar{e}_i$

vettore di U di componenti $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ rispetto $\mathcal{B}(U)$ $\longmapsto$ vettore di W di componenti $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ rispetto $\mathcal{B}(W)$

CASO PARTICOLARE.

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base.

Consideriamo la funzione

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\bar{v} = \sum \alpha_i \bar{e}_i \longrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

→ questo è un isomorfismo.

$$\sum \alpha_i \bar{e}_i \longmapsto \alpha_1(1\,0\,0\ldots 0)+\alpha_2(0\,1\,0\ldots 0) + \ldots + \alpha_n(0\,0\ldots 0\,1) =$$
$$= (\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n).$$

Esempio

$$\mathbb{K}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathbb{K}^4 = \left\{ (a\ b\ c\ d) \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a\ b\ c\ d)$$

N.B. φ dipende dalla base $\mathcal{B}$ fissata.

S_2 = spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano.

$\mathcal{B} = (\uparrow, \rightarrow)$

$\mathbb{R}^2 =$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1\,0), (0\,1))$

$$\varphi : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha\uparrow + \beta\rightarrow \;\longmapsto\; (\alpha, \beta)$$

$$\varphi(\uparrow) = (1\,0)$$

$$\varphi(\rightarrow) = (0\,1)$$

$$\nearrow + \downarrow \;\xrightarrow{\;\varphi\;}\; (2,2) + (-2,0)$$

$$\rightarrow \;\xleftarrow{\;\varphi^{-1}\;}\; = (0,2)$$

1) Uno sp. vettoriale V

$\mathcal{B}$ base di V $\quad \mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\Rightarrow$ ogni vettore di $V \ni \bar{v}$

si rapp. in modo

unico come c. lineare

dei vettori di $\mathcal{B}$

$\downarrow$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ componenti di

$\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$ se

$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

2) Ogni app. lineare $f: U \to V$

è descritta dalle immagini

dei vettori di una base $\mathcal{B}(U)$

$\mathcal{B}(U) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$

$$f(\bar{g}_1) = \bar{v}_1 = f_{11}\bar{e}_1 + \dots + f_{1n}\bar{e}_n$$
$$f(\bar{g}_2) = \bar{v}_2 = f_{21}\bar{e}_1 + \dots + f_{2n}\bar{e}_n$$
$$\vdots$$
$$f(\bar{g}_m) = \bar{v}_m = f_{m1}\bar{e}_1 + \dots + f_{mn}\bar{e}_n$$

La matrice di f rispetto le basi $\mathcal{B}(U) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$ e $\mathcal{B}(V) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ è esattamente

$$\begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}^T$$

e tale matrice (insieme alle basi) descrive in modo univoco la funzione $f: U \to V$

In particolare se $\dim U = m$, $\dim V = n$ la matrice che descrive una applicazione lineare $f: U \to V$ è una matrice $n \times m$ tale che la colonna i-esima della stessa contiene le

componenti del vettore
$f(\bar{g}_i)$ rispetto la base $\mathcal{B}(V)$.

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & & f_{mn} \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\bar{g}_1) & f(\bar{g}_2) & & f(\bar{g}_m) \end{array}
\end{array}$$

Sia ora $\bar{u} = \sum u_i \bar{g}_i$

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{2n} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} f_{21} \\ \\ \cdots \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} f_{m1} \\ \\ f_{mn} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \\
\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & & C_m \end{array}
\end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 f_{11} + u_2 f_{21} \cdots + u_m f_{m1} \\ u_2 f_{12} + u_2 f_{22} + \cdots u_m f_{m2} \\ \vdots \\ u_1 f_{1n} \quad \cdots\cdots \quad u_m f_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= u_1 C_1 + u_2 C_2 + \dots + u_m C_m$$

$$\downarrow$$

$$u_1 f(\bar{g}_1) + u_2 f(\bar{g}_2) + \dots + u_m f(\bar{g}_m)$$

$$= f(u_1 \bar{g}_1 + \dots + u_m \bar{g}_m) = f(\bar{v}).$$

In generale sia $f: V_n(\mathbb{K}) \to U_m(\mathbb{K})$ una funzione lineare.

Siano $\mathcal{B}(V) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ e $\mathcal{B}(U) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$ basi di V e di U.

e sia $A = ((a_{ij}))$ la matrice della funzione lineare f ovvero la matrice la cui i esima colonna contiene le componenti rispetto $\mathcal{B}(U)$ dell'immagine $f(e_i)$.

ALLORA se ~~una~~ $\bar{v} \in V$ é un vettore di componenti $(v_1 \dots v_n)$ rispetto la base $\mathcal{B}(V)$ abbiamo che $f(\bar{v})$ é il vettore di componenti $(u_1 \dots u_m)$ rispetto $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ ove

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow (u_1 \dots u_m) = (v_1 \dots v_n)\,{}^{T}\!A$$

giustificazione del prodotto righe per colonne.

e il prodotto di matrici in generale?

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_1' \\ \vdots & \vdots \\ v_n & v_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_1' \\ \vdots & \vdots \\ u_m & u_m' \end{bmatrix}$$

colonne di lungh n

$$A\begin{bmatrix} C_1 \cdots C_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC_1 \; AC_2 \cdots AC_K \end{bmatrix}$$

colonne di lunghezza m

Supponiamo di avere 3 spazi vettoriali: $U_n(\mathbb{K}), V_m(\mathbb{K}), W_k(\mathbb{K})$

$$U_n \xmapsto{f} V_m$$

$$V_m \xmapsto{g} W_k$$

lineari.

Siano $\mathcal{B}(U), \mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)$ basi fissate e siano A la matrice di f e B la matrice di g.

→ Vogliamo trovare la matrice di $g \circ f$ $: U_n \to W_k$

la matrice di f è un elemento A di $\mathbb{K}^{m,n}$

#righe = dim codominio
#colonne = dim dominio

la matrice di g è un elemento $B \in \mathbb{K}^{k,m}$

osserviamo che $BA \in \mathbb{K}^{k,m}$
e corrisponde quindi ad una appl. lineare $V \to W$

ASSERISCO CHE BA è proprio la matrice di $g \circ f$

($\Rightarrow$ il prodotto di matrici è associativo!)

consideriamo la matrice di $g \circ f$:

$\mathcal{B}(U) = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}(V) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$

$\mathcal{B}(W) = (\bar{h}_1 \dots \bar{h}_k)$

$\bar{e}_1$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{k1} & b_{k2} \cdots & b_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + \cdots + b_{1m} a_{m1} \\ \vdots \\ b_{k1} a_{11} + \cdots + b_{km} a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$g \circ f(\bar{e}_1) = g\left(\sum a_{x1}\bar{g}_x\right) =$$

$$= \sum_{x=1} a_{x1}\, g(\bar{g}_x) =$$

$$= \sum a_{x1} \boxed{\sum_{y=1}^{k} b_{yx}\bar{h}_y}$$

$\Rightarrow$ nella posizione colonna 1
riga t

coeff di $\bar{h}_t$ abbiamo $\boxed{\sum a_{x1} b_{tx}}$

$g \circ f$

BA

$\mathbb{R}$

$$f: U \to V \qquad \dim U = n$$

$$g: V \to W \qquad \dim V = m$$

$$\dim W = k$$

$$\mathcal{B}(U) = (\bar{e}_1 \dots e_n) \qquad A \text{ matrice di } f$$

$$\mathcal{B}(V) = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m) \qquad B \text{ matrice di } g$$

$$\mathcal{B}(W) = (\bar{h}_1 \dots h_k). \qquad C \text{ matrice di } g \circ f$$

$$(g \circ f)(\bar{e}_i) = g\left(\sum_{x=1}^{m} a_{xi}\, \bar{g}_x\right) =$$

$$= \sum_{x=1}^{m} a_{xi}\, g(\bar{g}_x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{m} a_{xi} \sum_{y=1}^{k} b_{yx}\, \bar{h}_y =$$

$$= \sum_{x=1}^{m} \sum_{y=1}^{k} a_{xi}\, b_{yx}\, \bar{h}_y$$

$\Rightarrow$ la componente (u,v) della matrice C corrisponde al coeff. di $\underline{\bar{h}_v}$ nell'immagine di $\bar{e}_v$

$$\Rightarrow \quad c_{uv} = \sum_{x=1}^{m} b_{ux} a_{xv} =$$

$$\begin{bmatrix} b_{u1} & b_{u2} & \cdots & b_{um} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1v} \\ a_{2v} \\ \vdots \\ a_{mv} \end{bmatrix} \qquad \square$$

$$\Rightarrow \quad C = BA$$