$$\mathcal{B}_1 = \Big( \overset{\bar e_1}{\overset{\shortparallel}{(1\,0)}}, \overset{\bar e_2}{\overset{\shortparallel}{(0\,1)}} \Big)$$

$$\mathcal{B}_2 = \Big( \underset{\bar f_1}{\underset{\shortparallel}{(0\,1)}}, \underset{\bar f_2}{\underset{\shortparallel}{(1\,0)}} \Big)$$

basi di $\mathbb{R}^2$

COMPONENTI

$(x,y) = x\bar e_1 + y\bar e_2 \rightarrow (x,y)$ risp. $\mathcal{B}_1$

$(x,y) = y\bar f_1 + x\bar f_2 \qquad (y,x)$ risp. $\mathcal{B}_2$

$\uparrow$

vettori

$(x,y)_{\mathcal{B}_1}$

$(y,x)_{\mathcal{B}_2}$

Es. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto cui il vettore $\bar v = (1\,0\,1)$ abbia componenti $(2\,1\,0)$

$\bar e_1' = (\tfrac{1}{2}\,0\,0) \quad \bar e_2' = (0\,0\,1) \quad \bar e_3' = (0\,1\,0)$

$$2\bar e_1' + \underset{1}{}\bar e_2' + \underset{0}{}\bar e_3' = (1\,0\,1)$$

$\cancel{\bar{f}_1 = (0\ \tfrac{1}{2}\ 0)\ f_2 =}$

$\bar{f}_1 = (0\ 0\ \tfrac{1}{2})$ $\quad f_2 = (1\ 0\ 0)$ $\quad \bar{f}_3 = (1\ 1\ 1)$

$$2\bar{f}_1 + 1\bar{f}_2 + 0\bar{f}_3 = 0$$

**OSS**: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vett. su $\mathbb{K}$ di dimensione $n$.

Allora

1) $\forall\, 0 \leq i \leq n \ \exists\, W \leq V$ con $\dim W = i$

2) Se $W \leq V \Rightarrow W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V$

**DIM**

1) Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$.

Allora $\phi \subseteq V(\mathbb{K})$ e $\dim \mathcal{L}(\phi)$

$= \dim \{\underline{0}\} = 0$

poniamo $W_i = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$

$1 \leq i \leq n$

$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ sono liberi perché vettori di una base di $V(\mathbb{K})$

sono generatori di $W_i$ per costruzione $\Rightarrow \dim W_i = i$

2) Se $W = V \Rightarrow \dim W = \dim V$

Se $W \leq V$ e $\dim W = \dim V = n$

allora ci sono $n$ vettori linear. indip. di $V$ in $W$.

Ma ogni seq. di $n$ vettori l. indip di $V$ e' base di $V \Rightarrow$ in particolare

$W \subseteq V \subseteq \mathcal{L}(W) = W$

perché $W$ contiene una seq. di generatori di $V$.

$\square$

per verificare $V = W$ basta $W \leq V$ e $\dim V = \dim W$.

---

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ s. vettoriale e $U, W \leq V$ sottospazi $\Rightarrow U \cap W$ é sottospazio di $V$

DIM: Si verificano le proprietà di chiusura su $U \cap W$.

$\bar{a}, \bar{b} \in U \cap W \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \in U$ che è sott.
e quindi $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in U$

$\bar{a}, \bar{b} \in W$ che è sott. $\Rightarrow$
$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in W$

$\Rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in U \cap W.$ $\square$

OSS: Se $U, W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$
$\underline{0} \in U \cap W$
in particolare due sottospazi di $V(\mathbb{K})$ non possono mai essere disgiunti!
(cioè $U \cap W \neq \emptyset$).

Cosa si può dire di $U \cup W$?
→ in generale non è un sottospazio.

$\mathbb{R}^2$ $\quad U = \mathcal{L}((1\,0))$

$W = \mathcal{L}((0\,1))$

$U \cup W = \{(a,b) \mid a = 0$ oppure $b = 0\}$.

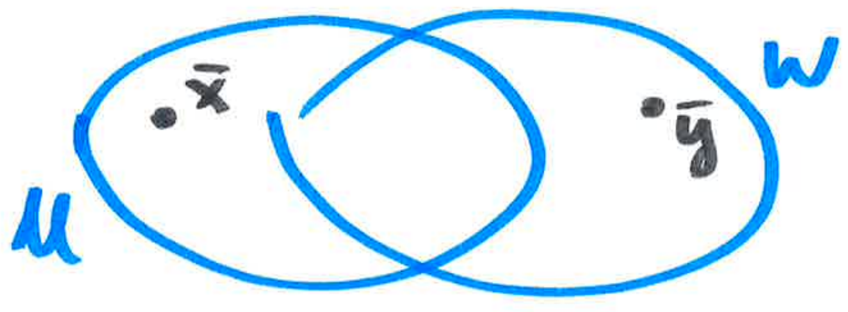
$(1\,0), (0\,1) \in U \cup W$ ma

$(1\,1) = (1\,0) + (0\,1) \notin U \cup W$

e quindi non é sottospazio.

OSS: $U \cup W \leq V(\mathbb{K})$ se e solamente se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$ e quindi $U \cup W = W$ oppure $U \cup W = U$.

verifica




$\exists \bar{x} \in U \setminus W$ e $\bar{y} \in W \setminus U$

facciamo vedere che $\bar{x}+\bar{y} \notin U \cup W$

in fatti se fosse $\bar{x}+\bar{y} \in U \cup W$

avremmo $\bar{x}+\bar{y} \in U$ oppure

$\bar{x}+\bar{y} \in W$

se $\bar{x}+\bar{y} \in U$ ed $\bar{x} \in U \Rightarrow$

$\bar{y} = (\bar{x}+\bar{y}) - \bar{x} \in U$ ↯ $\bar{y} \in W \setminus U$

similmente se $\bar{x}+\bar{y} \in W$, $\bar{y} \in W$

$\Rightarrow \bar{x} = (\bar{x}+\bar{y}) - \bar{y} \in W$ ↯ $x \in U \setminus W$

---

<u>Def</u>: Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$. si dice

<u>somma</u> di $U$ e $W$

$$U + W = \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \}.$$

<u>Teorema</u>: $U + W = \mathcal{L}(U \cup W)$

la somma di $U$ e $W$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia $U$ che $W$.

DIM:

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}+W$ in quanto $\underline{0} \in W \Rightarrow \bar{u}+\underline{0} \in \mathcal{U}+W$ $\forall \bar{u} \in \mathcal{U}$

$W \subseteq \mathcal{U}+W$ $\underline{0} \in \mathcal{U} \Rightarrow \underline{0}+\bar{w} \in \mathcal{U}+W$ $\forall \bar{w} \in W$.

$\Rightarrow \mathcal{U} \cup W \subseteq \mathcal{U}+W$

OSS: Se $X \leq V$ con $\mathcal{U} \cup W \subseteq X$ necessariamente $\forall \bar{u} \in \mathcal{U}, \forall \bar{w} \in W$ abbiamo $\bar{u}+\bar{w} \in X$

$\Rightarrow \mathcal{U}+W \subseteq \underbrace{\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)}_{\text{più piccolo } X \text{ che contiene } \mathcal{U} \cup W.}$

facciamo vedere che $\mathcal{U}+W$ è sottospazio vettoriale.

$\bar{u}_1+\bar{w}_1, \bar{u}_2+\bar{w}_2 \in \mathcal{U}+W$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha(\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + \beta(\bar{u}_2 + \bar{w}_2) =$$

$$= \underbrace{(\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2)}_{\in W} \in$$

$$\in U + W \qquad \square$$

OSS: Legame fra dimensioni

$$U, W \leq V(\mathbb{K})$$

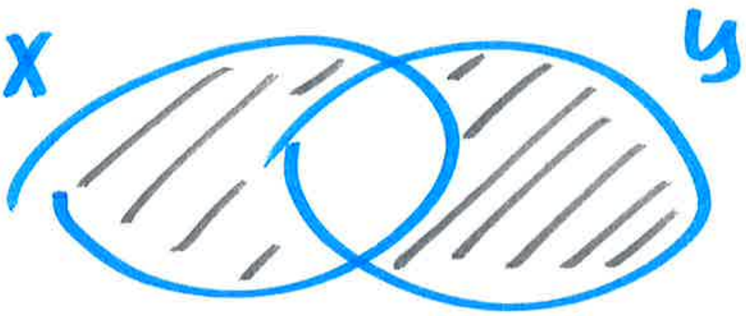
$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$$

$$\dim V \geq \dim(U + W) \geq \max(\dim U, \dim W)$$

Formula di Grassmann

$$\boxed{\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)}$$

"stile inclusione/esclusione"



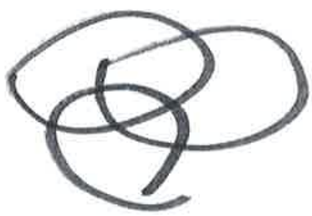

insiemi

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y|$$

$$|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|$$
$$|Y \setminus X| = |Y| - |Y \cap X|$$

$$|X \cup Y| = |X| - |X \cap Y| + |Y| - |X \cap Y| + |X \cap Y|$$
$$= |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

N.B. $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$



# Somma diretta di 2 sottospazi:

Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$.

Diciamo che la somma fra $\mathcal{U}$ e $W$ è diretta e scriviamo

$\mathcal{U} \oplus W$ al posto di $\mathcal{U} + W$

se $\forall\, \bar{v} \in \mathcal{U} \oplus W \ \exists!\, \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W$

tali che $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$.

**Teorema:** $\mathcal{U} \oplus W \iff \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

DIM: Supponiamo $\mathcal{U} \oplus W$ diretta

e sia $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W$.

per ipotesi $\forall \bar{v} \in \mathcal{U} \oplus W$

$\exists!\, \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W$:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

ma se $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W \Rightarrow$

$$\bar{u} + \bar{x} \in \mathcal{U}, \quad \bar{w} - \bar{x} \in W$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$$

$\Rightarrow \overline{u} + \overline{x} = \overline{u} \Rightarrow \overline{x} = \underline{0}$

$\overline{w} + \overline{x} = \overline{w} \Rightarrow \overline{x} = \underline{0}$

Viceversa: supponiamo

$$\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}.$$

se per assurdo $\mathcal{U}$ e $W$ non fossero in somma diretta $\Rightarrow \exists\, \overline{v} = \overline{u}_1 + \overline{w}_1 = \overline{u}_2 + \overline{w}_2$ con $(\overline{u}_1, \overline{w}_1) \neq (\overline{u}_2, \overline{w}_2)$

$$\Rightarrow \overline{u}_1 + \overline{w}_1 = \overline{u}_2 + \overline{w}_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\overline{u}_1 - \overline{u}_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}_{\in W} \neq \underline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{u}_1 - \overline{u}_2 \in \mathcal{U} \cap W$$

assurdo perché $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

$\square$

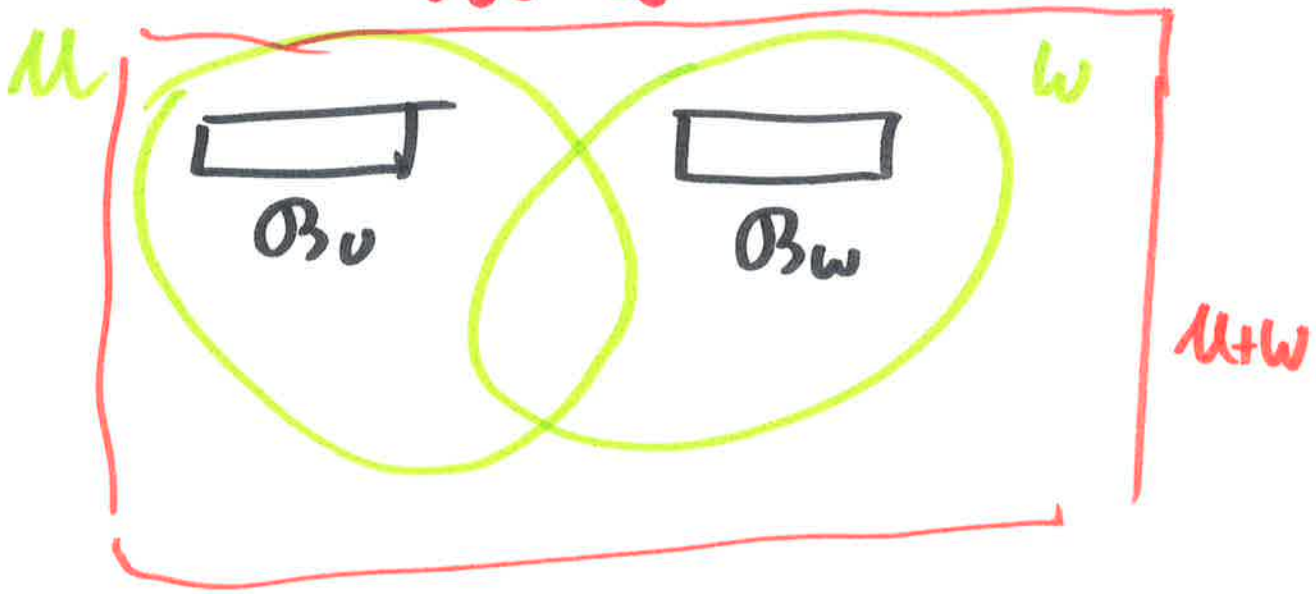
<u>OSS:</u> Sia $\mathcal{B}_U$ una base di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}_W$ una base di $W$. $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$.

ALLORA

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ é

una sequenza di generatori di

$U+W$




Es. $U = \mathcal{L}((1\,0\,0),(0\,1\,0))$

$W = \mathcal{L}((1\,0\,0),(0\,2\,3))$

$U+W = \mathcal{L}(U \cup W) =$

$= \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_U) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B}_W)) =$

$= \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)) =$

$= \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W).$

$U = \mathcal{L}((1\,1\,0), (0\,1\,1))$

$W = \mathcal{L}((1\,0\,0), (2\,3\,4))$.

Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ con $U \oplus W$ e siano $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$ delle loro basi $\Rightarrow$

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è base di $U \oplus W$.

DIM: Sia $\mathcal{B}_U = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_k)$

$\mathcal{B}_W = (\bar{f}_1 \dots \bar{f}_m)$

per ipotesi $U \oplus W \Rightarrow$ ogni vettore $\bar{v} \in U \oplus W$ si scrive in modo unico come

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$

ma $\mathcal{B}_U$ é base di $U$

$\Rightarrow \bar{u}$ si scrive in modo unico come c. lineare degli $\bar{e}_i$

$$\bar{u} = \sum \alpha_i \bar{e}_i$$

$\mathcal{B}_W$ é base di $W$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{w} = \sum \beta_j \bar{f}_j$ in modo unico.

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} = \sum \alpha_i \bar{e}_i + \sum \beta_j \bar{f}_j$$

si scrive in modo unico come c. lineare di:

$$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_K \ \bar{f}_1 \dots \bar{f}_m)$$

$\square$

CONSEGUENZA

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$

$$= \dim U + \dim W - 0 =$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W \quad \blacksquare$$

<u>somma diretta</u>

## CASO GENERALE

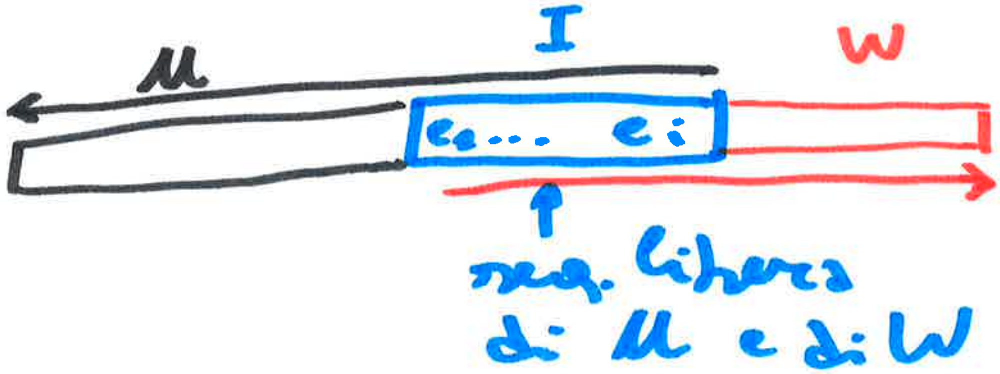
$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

$$I = U \cap W \begin{cases} \{\underline{0}\} \\ \dim I > 0 \end{cases}$$

se $I = \{\underline{0}\}$ abbiamo già visto.
perché la somma è diretta.

se $\dim I > 0 \Rightarrow \exists\, \mathcal{B}_I$ base di $I$

$$\mathcal{B}_I = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$$



AGGIUNGIAMO A $\mathcal{B}_I$

$(\dim W) - i$
vettori di $W$ per avere una
base di $W$ $\rightarrow \mathcal{B}_W$

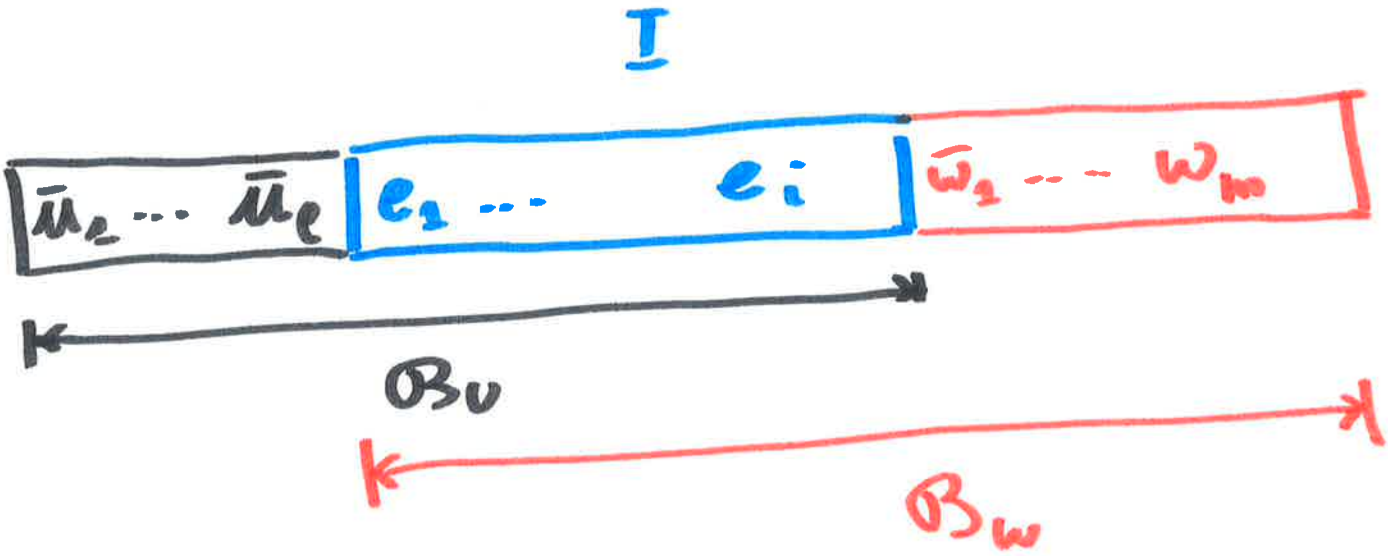
$(\dim U) - i$
vettori di $U$ per avere una
base di $U$ $\rightarrow \mathcal{B}_U$

OSSERVIAMO CHE $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$
(contando i vettori di $\mathcal{B}_I$
una sola volta) è ~~sis.~~ sis. di
generatori per $U + W$

→ DOBBIAMO DIMOSTRARE
CHE È ANCHE LIBERA.

$|\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| = |\mathcal{B}_U| + |\mathcal{B}_W| - |\mathcal{B}_I| =$

$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W$




Supponiamo per assurdo che la seq. sia legata.

$$\underline{0} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_\ell \bar{u}_\ell + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_m \bar{w}_m$$

con gli $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ non tutti nulli.

<u>OSS</u>: NON PUÒ ESSERE CHE GLI $\alpha_i$ siano TUTTI $= 0$ perché altrimenti avremmo una c. lineare di vettori di $\mathcal{B}_W$

che è base a coeff. non tutti nulli
che dà $\underline{e}$ ...

$$\underbrace{\boxed{-\alpha_1\bar{u}_1 - \dots - \alpha_\ell \bar{u}_\ell}}_{\substack{\neq\\ \underline{0}}} = \boxed{\begin{array}{l}\beta_1\bar{e}_1 + \dots + \beta_i\bar{e}_i \\ + \gamma_1\bar{w}_1 + \dots + \gamma_m\bar{w}_m\end{array}}$$

perchè c. lineare a coeff non tutti 0 di elementi di $\mathcal{B}_U$

è un vettore di $W$ perché c. lineare di elementi di $W$

è un vettore di $U$

$$\Rightarrow \in U \cap W = I$$

e quindi si scrive in componenti rispetto $\mathcal{B}_I$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_i$ tali che

$$\delta_1\bar{e}_1 + \dots + \delta_i\bar{e}_i = \beta_1\bar{e}_1 + \dots + \beta_i\bar{e}_i + \gamma_1\bar{w}_1 + \dots$$

$$-\alpha_1\bar{u}_1 - \dots - \alpha_\ell \bar{u}_\ell = \delta_1\bar{e}_1 + \dots + \delta_i\bar{e}_i$$

cioè

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \dots + \alpha_\ell\bar{u}_\ell + \delta_1\bar{e}_1 + \dots + \delta_\ell\bar{e}_\ell = \underline{0}$$

con almeno un coeff. $\alpha_k \neq 0$

ma questa è una c. lineare di $\mathcal{B}_U$ e dunque ~~$\frac{l}{y}$~~ perché non sarebbe una sequenza libera

$\square$

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ come costruita è base di $U + W$