Base

- Sistema di Generatori
- Sequenza libera.

X sistema di generatori per $W \leq V(\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow$ $W = \mathcal{L}(X)$ $\Leftrightarrow$ ogni vettore
$\bar{w} \in W$ si può scrivere come
c. lineare ~~dei vettori~~ di un
numero finito di vettori di X

X sistema di generatori legato $\Rightarrow$
$\exists \bar{x}' \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}'\})$

$\rightarrow$ Sistemi liberi di generatori

<u>Teorema</u>: Sia $X = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ una
sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$.
Allora $\forall \bar{w} \in \mathcal{L}(X)\ \exists!\ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$
tali che $\bar{w} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$

(ogni vettore di $\mathcal{L}(X)$ si scrive in modo
unico come c. lineare dei vett. di X)

DIM: $\overline{w} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \overline{w}$ si scrive come c. lineare di un numero finito di elementi di $X \Rightarrow \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\overline{w} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \dots + \alpha_n \overline{x}_n$$

Supponiamo per assurdo $\exists (\beta_1 \dots \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ con $(\beta_1 \dots \beta_n) \neq (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ tali che

$$\beta_1 \overline{x}_1 + \dots + \beta_n \overline{x}_n = \alpha_1 \overline{x}_1 \dots + \alpha_n \overline{x}_n$$

$$\Rightarrow (\beta_1 - \alpha_1)\overline{x}_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)\overline{x}_n = \underline{0}$$

ma almeno uno dei $\beta_i \neq \alpha_i$

$\Rightarrow$ abbiamo una c. lineare a coeff. non tutti nulli che dà $\underline{0}$ ↯

ASSURDO perché X libero. □

Def: Sia $B \subseteq V(\mathbb{K})$ una sequenza di vettori. Allora B é detto <u>base</u> se ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere in modo unico come c. lineare di un numero finito di elementi di B.

CONSEGUENZA:

~~Dim~~ Se B é una seq. libera di generatori $\Rightarrow$ B é base di $V(\mathbb{K})$.

seq. di gen $\Rightarrow$ $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ é c. lineare di un numero finito di el. di B

seq. libera $\Rightarrow$ la c. lineare é unica.

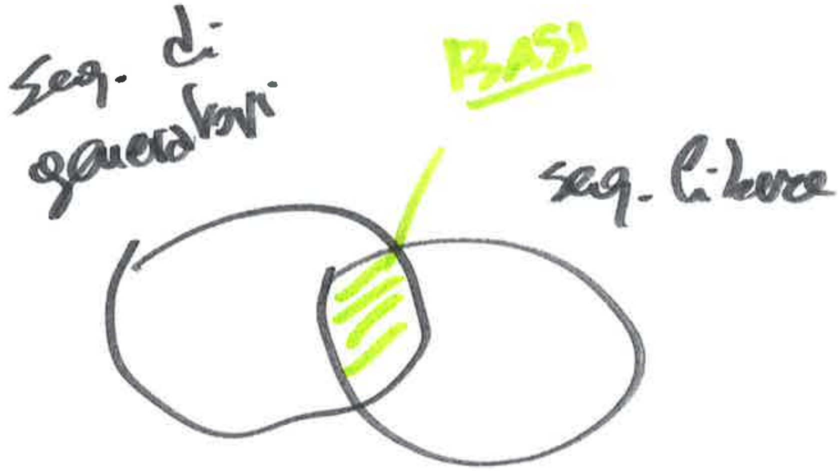
Viceversa: B base $\Rightarrow$ B seq. libera di generatori:

$\downarrow$

B base $\Rightarrow$ B di generatori in quanto ogni el. di $V(\mathbb{K})$ è c. lin. di un numero finito di elementi di B

e B libera perché se
fosse B legata ⇒
$\underline{0}$ si scriverebbe in almeno
2 modi diversi ⇒ B non
sarebbe base □

B base ⇔ B seq. libera di
generatori



- Una seq. di generatori minimale è una base.
- Una seq. libera di vettori max è una base.

Lemma di Steinitz

Siano $A=(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ e $B=(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ rispettivamente una sequenza libera di m vettori ed una seq. di generatori di n vettori. Allora $m \le n$.

(In particolare

$$\max\{|A| \mid A \text{ libera}\} \leq \min\{|B| : B \text{ di gen}\}.)$$

DIM (per assurdo).

Supponiamo $m > n$ e mostriamo che c'è una contraddizione.

A libera $(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \dots a_m)$

B generatori $(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

$\bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B) \Rightarrow \exists (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$:

$$\bar{a}_1 = \alpha_{11}\bar{b}_1 + \dots + \alpha_{1n}\bar{b}_n$$

e almeno uno degli $\alpha_{1i} \neq 0$ perché altrimenti $\bar{a}_1 = \underline{0} \in A$ ↯ perché A libera.

Supponiamo sia $\alpha_{11} \neq 0$. $\Rightarrow$

$$\bar{b}_1 = \alpha_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_{12}\bar{b}_2 \dots - \alpha_{1n}\bar{b}_n)$$

In particolare $\bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

e dunque $\mathcal{L}(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n) \subseteq \mathcal{L}(\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

$\subseteq \mathcal{L}(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n) = V(\mathbb{K})$

cioé $(\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ é una seq. di generatori per $V(\mathbb{K})$

$(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m)$

$(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ $\longrightarrow$

$(\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) =: B_1$ seq. di generatori

si itera il procedimento con $\bar{a}_2$ e B_1 cioé

$\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \exists\, \alpha_{21}\, \alpha_{22} \dots \alpha_{2n}$ tali che

$$\bar{a}_2 = \alpha_{21}\bar{a}_1 + \alpha_{22}\bar{b}_2 + \dots + \alpha_{2n}\bar{b}_n$$

OSS: $(\alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}) \neq (0 0 \dots 0)$ perché alt.

$\bar{a}_2$ sarebbe proporzionale ad $\bar{a}_1$ ↯ perché A libera.

$\Rightarrow$ supponiamo $\alpha_{22} \neq 0$ ed abbiamo

$$\bar{b}_2 = (\bar{a}_2 - \alpha_{21}\bar{a}_1 - \alpha_{23}\bar{b}_3 - \dots - \alpha_{2n}\bar{b}_n)\alpha_{22}^{-1}$$

$$\Rightarrow \bar{b}_2 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$$

e come prima vediamo che

$$B_2 := (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$$

seq. di generatori.

continuando in questo modo ed osservando ad ogni passaggio i che il vettore $\bar{a}_i$ si scrive come c. lineare dei vettori di B_{i-1} con i coeff. $\alpha_{ii}\ \alpha_{ii+1} \dots \alpha_{in}$ non tutti nulli. arriviamo ad avere una seq.

di generatori

$B_n = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n)$ ↗ fatta tutta dai vettori di A

$A \;= (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n \, \bar{a}_{n+1} \cdots \bar{a}_m)$

ma $\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(B_n) =$

$\mathcal{L}(\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n)$.

Quindi in A c'é almeno un vettore che é c.lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ A é legata ↯ perché per ipotesi A é libera $\square$

$\Rightarrow \boxed{m \leq n.}$

Conseguenze: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato.

Allora

1) Ogni base di $V(\mathbb{K})$ ha il medesimo numero di elementi $n = \dim(V)$. e tale numero é detto dimensione di $V(\mathbb{K})$

2) Sia $V_n(\mathbb{K})$ di dimensione n

$\Rightarrow$ 2.1) ogni sequenza di $m > n$ vettori è legata

2.2) ogni sequenza di $t < n$ vettori non genera $V_n(\mathbb{K})$.

2.3) ogni seq. di n generatori di $V_n(\mathbb{K})$ è libera $\Rightarrow$ BASE

2.4) ogni seq. libera di n vettori è di generatori $\Rightarrow$ BASE.

DIM:

1) Siano B, B' due basi

$\Rightarrow$ B libera, B' di gen. $\Rightarrow |B| \leq |B'|$

B di gen., B' libera $\Rightarrow |B'| \leq |B|$

$\Rightarrow |B| = |B'|$.

2.1) poiché c'è una seq. di n vettori che è base ($\Rightarrow$ di gen.) ha card. di una

seq. libera m deve essere $m \leq n$.
Se $m > n \Rightarrow$ la seq. é legata.

2.2) poiché esiste una seq. di n vettori che é base ($\Rightarrow$ libera) nessuna seq. di $t < n$ vettori può essere di generatori.

2.3) Sia $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una seq. di n vettori che generano $V_n(\mathbb{K})$.
Se per assurdo B fosse legata
$\Rightarrow$ possiamo applicare gli scarti successivi ed ottenere $B' \subsetneq B$ di generatori con $|B'| < n$. Ma in $V_n(\mathbb{K})$ le basi hanno card. $= n \Rightarrow \exists$ una seq. <u>libera</u> di n vettori 4 per steinitz.
Ne segue B libera.

2.4) Sia $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una seq. libera di n vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

Se B non fosse di generatori $\Rightarrow \exists\, \bar{b} \in V \setminus \mathcal{L}(B)$ ma allora $B' = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\, \bar{b})$ sarebbe una seq. libera di $n+1$ vettori (in questo nessuno dei suoi el. è c. lineare dei rimanenti) $\Rightarrow$ $\lightning$ perché in $V_n(\mathbb{K})$ c'è una sequenza di n vettori che è di generatori. Ne segue che $\mathcal{L}(B) = V$ $\square$

Una seq. libera di card. massima è base $\Rightarrow$ di generatori.

Una seq. di generatori di card. minima è base $\Rightarrow$ libera.

OSS: per definizione una BASE è una sequenza di vettori

in $\mathbb{R}^2$, $((1\,0),(0\,1)) = \mathcal{B}_1$

$((0\,1),(1\,0)) = \mathcal{B}_2$

sono basi differenti!!

$(x,y) \rightarrow (x,y) = x(1\,0) + y(0\,1)$

$(x,y) = y(0\,1) + x(1\,0)$

Si dicono componenti di $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ rispetto una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ fissata la n-upla di $\mathbb{K}^n$ dei coeff. che danno la c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ che fornisce $\bar{v}$.

In alcuni testi questa è detta BASE ORDINATA mentre BASE è un insieme di gen. linearmente indipendenti.

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

componenti della matrice rispetto B_1 sono $(a \ b \ c \ d)$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

componenti rispetto B_2 sono $(a \ c \ d \ b)$

In $\mathbb{K}^n$ si dice <u>base canonica</u> la base $((1 0 \ldots 0), (0 1 0 \ldots 0), \ldots (0 0 0 \ldots 1))$

rispetto a cui le componenti di un vettore $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ sono proprio date da $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

$\mathbb{R}^3$ $\qquad B = (\bar{e}_1 = (1\,0\,0), \bar{e}_2 = (0\,1\,0)$
$\bar{e}_3 = (0\,0\,1))$

$(x, y, z) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$

$\downarrow$

ha componenti $(x\ y\ z)$.

<u>DOMANDA</u>: Ogni spazio vett. ammette almeno una base?

<u>No</u>: $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$ non esistono in $V(\mathbb{K})$ vettori linearmente indipendenti

$\rightarrow$ sp. vettoriale <u>banale</u>

Teorema: Ogni spazio vettoriale non banale ammette base.

[esempio di s. vettoriale "difficile" $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$]

MOSTREREMO CHE OGNI s. vett. finitamente generato non banale ammette base.

DIM: SCARTI SUCCESSIVI.

↓

X sistema di generatori finito

⇒ iterare scarti succ.

fino a che

- $X = \phi$ ⇒ s. vett. banale
- X è seq. libera ⇒ avere una base.

□

In particolare ad ogni s.vett. $V(\mathbb{K})$ è possibile associare un numero $\dim V(\mathbb{K})$.

- Se $V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim V = 0$
- Se $V(\mathbb{K}) \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim V = |\mathcal{B}|$
  ove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base di V.

→ Essenzialmente uno s.vettoriale su $\mathbb{K}$ è univocamente caratterizzato dalla sua dimensione.

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathbb{R}^4 = \{ (a \; b \; c \; d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^4 \cap \mathbb{R}^{2,2} = \phi$$

S_2 = s.vett. frecce del piano

$\mathbb{R}^2$

$B = (\uparrow, \rightarrow)$

$$\nearrow = \alpha \uparrow + \beta \rightarrow$$

$$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

ALGORITMO: SISTEMA (finito) DI GENERATORI $\rightarrow$ $\emptyset$, BASE

ALG. II ~~SEQ~~ [SEQUENZA LIBERA] + [BASE FISSATA] $\rightarrow$ BASE ? CHE CONTIENE LA SEQ. LIBERA DI PARTENZA

Metodo di completamento della BASE.

Sia A una seq. libera di $V_n(\mathbb{k})$ e B una sua base. Allora è sempre possibile prendere $|B|-|A|$ vettori da B che aggiunti ad A danno una base.

DIM: Uguale al Lemma di Steinitz.

$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$ LIBERA.

$B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}_n)$ BASE

$k = n \Rightarrow A$ è base $\square$

$k = 0 \Rightarrow$ prendiamo tutto B $\square$

con la dim. di Steinitz abbiamo sost. nella seq. di generatori (B) elementi di A

$\Downarrow$

applichiamo la stessa procedura.

$\rightarrow$ dopo k passaggi avremo

$$B_k = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k \underbrace{\bar{b}_{k+1} \dots \bar{b}_n}_{\text{sono i vett. da aggiungere ad } A})$$

Esempio.

In $\mathbb{R}^4$

$$A = ((1100), (1001))$$

completare a base.

$$B = ((1000), (0100) (0010) (0001)).$$

$$\underbrace{(1100)}_{} = \boxed{1(1000)} + \underbrace{1(0100)}_{} + 0(0010)$$
$$+ 0(0001).$$

$$B_1 = ((1100), (0100), (0010), (0001)).$$

No

$$(1001) = 1(1100) + (-1)(0100)$$
$$+ 0(0010) + 1(0001)$$

No

$$B_2 = (\underline{(1100)}, \underbrace{(0100), (0010)}_{\text{compl.}}, \underline{(1001)})$$