$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$W \subseteq V \Rightarrow W \leq V$ sottospazio

se e solamente se

$$\left[\begin{array}{c} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in W \\ \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in W \end{array} \right]$$

$\underline{0} \notin W \Rightarrow W$ NON È SOTTOSPAZIO.

$\underline{0} \in W \not\Rightarrow$ non implica W sottospazio.

$W = \{ (a^2, b^2) \mid a, b \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

ma non è sottospazio

anche se $\underline{0} \in W$ e

$\forall (x,y), (x',y') \in W : (x,y) + (x',y') \in W$

$W = \{ (1, a, b) \mid a + b = 0 ; a, b \in \mathbb{R} \}$

NON È SOTT. DI $\mathbb{R}^3$ perché

$\underline{0} \notin W$

COPERTURA LINEARE (CHIUSURA LINEARE)

$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$X \subseteq V$. Qual è il più piccolo sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che $X \subseteq W$? W sarà detto <u>sottospazio generato da X</u>

<u>Def</u>: $X \subseteq V(\mathbb{K})$ Si dice copertura lineare di X l'insieme

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\langle X \rangle$

$\mathcal{L}(X)$ è l'insieme di tutte le comb. lineari di un numero <u>finito</u> di elementi di X

Teorema: $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X.

DIM: Se $W \leq V(\mathbb{K})$ ed $X \subseteq W \Rightarrow$ ogni comb. lineare di elementi di X in numero finito deve essere contenuta in W.

In particolare $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

per far vedere che $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio che contiene X basta adesso far vedere che $\mathcal{L}(X)$ è sp. vettoriale.

Siano
$$\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i$$
$$\bar{v}_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{x}_j$$
due elementi di $\mathcal{L}(X)$

$$\Rightarrow \quad \delta \bar{v}_1 + \mu \bar{v}_2 =$$
$$= \delta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \mu \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{x}_j =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \bar{x}_i + \sum_{j=1}^{m} \mu \beta_j \bar{x}_j}$$

è combinazione lineare di al più $m+n$ vettori di X $\Rightarrow$ è un elemento di $\mathcal{L}(X)$. $\Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$.

$\square$

<u>Esempi</u>: $W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{L}(W) = W$

$\{\underline{0}\}$ $\qquad \mathcal{L}(\{\underline{0}\}) = \{\underline{0}\}$. $\quad \mathcal{L}(V) = V$

$\{(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}((1 2 3)) = \{\alpha(1 2 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathcal{L}(\{(1 2 3), (0 1 2)\}) = \{\alpha(1 2 3) + \beta(0 1 2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Def: Sia X un sottoinsieme/ ~~sott~~ sequenza/sistema di $V(\mathbb{K})$. Diciamo che X è un insieme/seq./sistema di generatori per $V(\mathbb{K})$ se

$$\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K}).$$

X è insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$ se e solamente se ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si può scrivere come c. lineare di un numero finito di elementi di X

$V(\mathbb{K})$ è detto finitamente generato se $\exists\, X \subseteq V(\mathbb{K})$ con $|X| < \infty$ e

$$\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K}).$$

Esempi.

- $\mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato

$\mathcal{G} = \{1, x, x^2 \dots\} = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- Lo spazio vettoriale $\ell^0(\mathbb{K})$ di tutte le successioni a valori in $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ NON È FINITAMENTE GENERATO

$\mathbb{C}(\mathbb{R})$ È FINITAMENTE GENERATO

$\mathcal{G} = \{1, i\}$.

$\mathbb{R}^3$ È FINITAMENTE GENERATO

$\{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}$.

$\{(1\,2\,3), (0\,2\,4), (5\,0\,1), (7\,3\,9),$
$(1\,-1\,0)\}$.

$V(\mathbb{K})$ è finitamente generato se ogni suo vettore si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di vettori scelti in un insieme finito fissato

$\exists X$ con $|X| < \infty : \forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$

$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$$

ed $X = \{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n\}$.

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\})$.

$= \{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}$.

<u>OSS:</u>

Sia $V(\mathbb{K})$ sp. vettoriale

$\Rightarrow$ DATI $X \subseteq Y \subseteq V(\mathbb{K})$

1) $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$

In particolare se $\mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X) = V(\mathbb{K}).$$

2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$

DIM: ~~Sia~~ $\mathcal{L}(Y) \supseteq \mathcal{L}(X)$

in quanto $\mathcal{L}(Y)$ è il più piccolo sottospazio che contiene Y; se $X \subseteq Y$ $\Rightarrow \mathcal{L}(Y)$ contiene anche X ma allora $\mathcal{L}(Y) \supseteq \mathcal{L}(X)$.

2) $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio vettoriale

$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ è il più piccolo sott. che contiene $\mathcal{L}(X) \Rightarrow$

$\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$.

$\square$

<u>OSS</u>: $\mathcal{L}(\emptyset)=\{\underline{0}\}$.

perché il più piccolo sottosp. di $V(\mathbb{K})$ è $\{\underline{0}\}$.

In $\mathbb{R}^2$ $\quad \emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$ $\mathcal{L}(\emptyset)=\{(0\ 0)\}$.

In $\mathbb{R}^{2,2}$ $\quad \emptyset \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ $\mathcal{L}(\emptyset)=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

<u>N.B</u>: $\mathcal{L}(X)$ in realtà non dipende solo da $X \subseteq V(\mathbb{K})$ ma anche da $V(\mathbb{K})$ e da $\mathbb{K}$!!

$\mathcal{L}_{V(\mathbb{K})}(X) = \ldots$

In $\mathbb{R}^2$: $\quad \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}((1\ 0))=\{\alpha(1\ 0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.

In $\mathbb{C}^2$: $\quad \mathcal{L}_{\mathbb{C}^2}((1\ 0))=\{\alpha(1\ 0) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$.

OSS: Siano $X, Y \subseteq V(\mathbb{K})$.

X insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow X \cup Y$ é un insieme di generatori per $V(\mathbb{K})$.

→ AGGIUNGERE VETTORI AD UN INSIEME DI GENERATORI FORNISCE ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI.

→ A NOI INTERESSANO INSIEMI PICCOLI DI GENERATORI!

↓

QUANDO AD UN INSIEME DI GENERATORI SI POSSONO TOGLIERE VETTORI?

↓

Vogliamo insiemi minimali di generatori.

Def: In $V_n(\mathbb{K})$ una sequenza di vettori $\overline{v}_1 \dots \overline{v}_n$ é detta sequenza libera se l'unica combinazione lineare dei $\overline{v}_i$ che dà il $\underline{0}$ é quella a coeff. tutti uguali a zero.

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \dots + \alpha_n\overline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Una sequenza é legata se non é libera, cioé

$$\exists\, (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0\,0 \dots 0) : \quad \alpha_1\overline{v}_1 + \dots + \alpha_n\overline{v}_n = \underline{0}$$

libera $\Leftrightarrow$ esiste un unico modo per ottenere $\underline{0}$ ed é quello con tutti i coeff $= 0$.

legata $\Leftrightarrow$ il $\underline{0}$ si può scrivere in più modi, di cui uno è sempre quello con tutti i coeff $= 0$, ma ce ne sono anche altri.

Esempi : in $\mathbb{R}^3$

$$((1\,0\,0), (1\,1\,0), (1\,1\,1))$$

è libera

$$\alpha(1\,0\,0) + \beta(1\,1\,0) + \gamma(1\,1\,1) =$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma \quad \beta+\gamma \quad \gamma) = (0\,0\,0)$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

<u>LIBERA</u>

$((1\,1\,0), (2\,2\,0))$ LEGATA.

$\alpha(1\,1\,0) + \beta(2\,2\,0) = (0\,0\,0)$

$(\alpha + 2\beta \quad \alpha + 2\beta \quad 0) = (0\,0\,0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -2\beta$$

$-2 \cdot (1\,1\,0) + 1 \cdot (2\,2\,0) = (0\,0\,0)$

Teorema: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$ una seq. di vettori $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ di $V(\mathbb{K})$.
Se X é legata $\Rightarrow \exists\, \bar{x}_i \in X$ tale che $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{x_i\})$.

(metodo degli scarti successivi)

- Una sequenza $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ é legata $\Leftrightarrow$ almeno uno dei suoi elementi é combinazione lineare dei rimanenti.

DIM:

$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n)$ legata $\Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n$ non tutti $= 0$ tali che

$$\alpha_1 \overline{x}_1 + \dots + \alpha_i \overline{x}_i + \dots + \alpha_n \overline{x}_n = \underline{0}$$

supponiamo $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow$

$$\alpha_i \overline{x}_i = -(\alpha_1 \overline{x}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \overline{x}_{i-1} + \alpha_{i+1} \overline{x}_{i+1} + \dots + \alpha_n \overline{x}_n)$$

$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_i^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow$ molt. per α_i^{-1}

$$\overline{x}_i = -\alpha_i^{-1} (\alpha_1 \overline{x}_1 + \dots \qquad + \dots \alpha_n \overline{x}_n)$$

$\overline{x}_i$ é c. lineare degli elementi rimanenti viceversa: $\bar{x}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{x}_j$

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots - \bar{x}_i + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \underline{0}$

c. lineare in cui il coeff. di $\bar{x}_i$ é -1 e che fornisce $\underline{0}$

$\Rightarrow$ la sequenza é legata. $\square$

DIM Teorema scarti successivi.

X insieme/seq. legata

$\Rightarrow$ per il lemma appena visto

$\exists\, \bar{x}_i \in X$ tale che $\bar{x}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{x}_j$

Consideriamo adesso $\mathcal{L}(X)$. Chiaramente

$$\mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}_i\}) \subseteq \mathcal{L}(X)$$

un generico elemento di

$\mathcal{L}(X)$ si scrive come

$$\bar{v} = \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_i \bar{x}_i + \dots + \beta_n \bar{x}_n$$

c. lineare di un numero finito di elementi di X

$$\beta_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{x}_j$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{x}_j + \dots + \beta_n \bar{x}_n$$

compaiono solo elementi di X diversi da $\bar{x}_i$

$$= \sum_{j \neq i} (\beta_j + \beta_i \alpha_j) \bar{x}_j \in \mathcal{L}(X \setminus \{\bar{x}_i\})$$

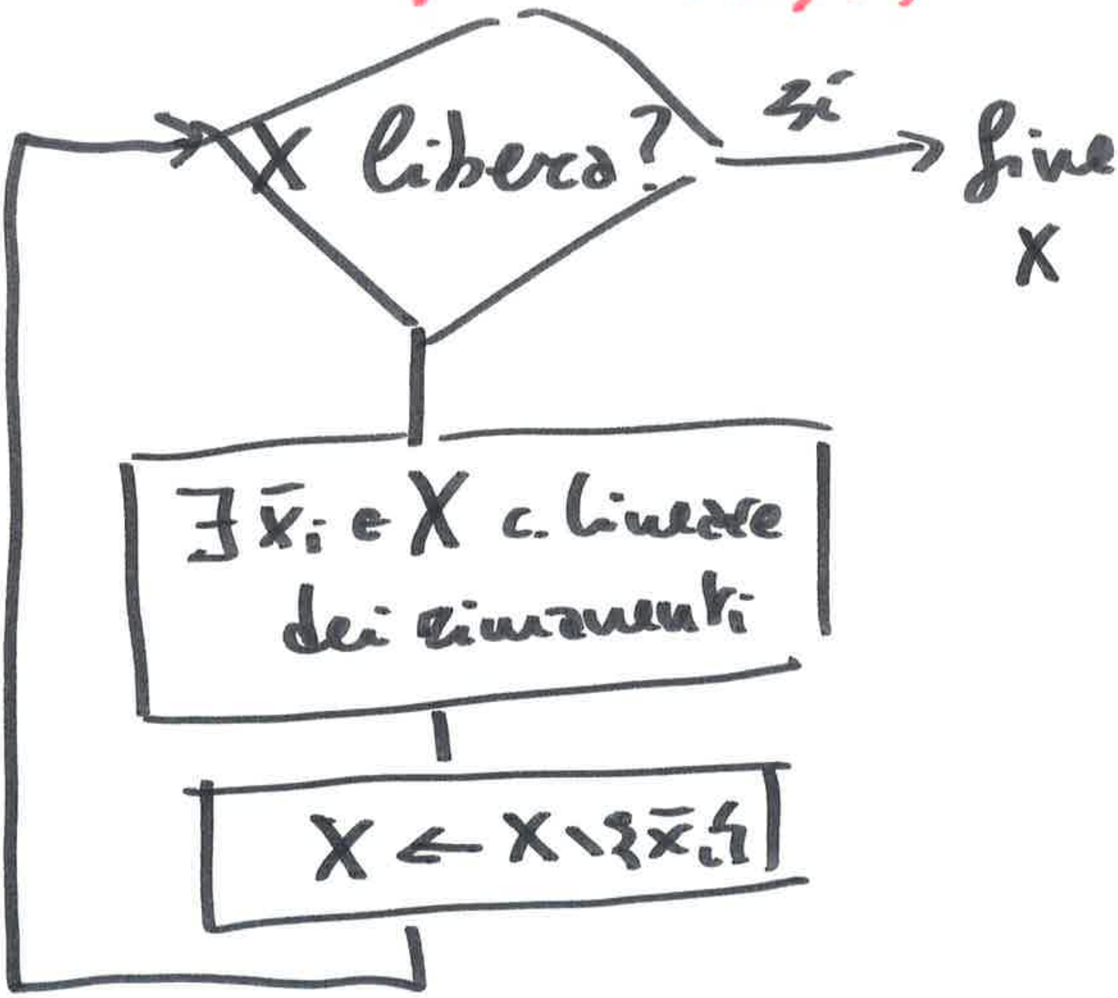
$$\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{x_i\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{x_i\}).$$

ALGORITMO

Sia $V(\mathbb{k})$ s. vettoriale

$X \subseteq V(\mathbb{k})$ seq. di generatori per $V(\mathbb{k})$ finita



Esempio $\mathbb{R}^2$ $X = ((1\,0), (1\,1), (2\,3), (0\,1))$

X libera? <u>NO</u> $-1(1\,0) + 3(1\,1) = (2\,3)$

$$-1(1\,0) + 3(1\,1) - (2\,3) = \underline{0}$$

$(2\,3)$ si può scartare.

$$X' = ((1\,0)\,(1\,1)\,(0\,1))$$

X' libera? <u>NO</u>

$$-1(1\,0) + (1\,1) - (0\,1) = \underline{0}$$

$$(0\,1) = -1 \cdot (1\,0) + (1\,1)$$

$(0\,1)$ si può scartare.

$$X'' = ((1\,0), (1\,1))$$

X'' libera? Sí $\alpha(1\,0) + \beta(1\,1) = (0\,0)$

$$\Rightarrow \beta = 0,\ \alpha = 0$$

$\square$

OSS: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$ seq. di vettori

1) $\underline{0} \in X \Rightarrow X$ é legata.

$$1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot \dots = \underline{0}$$

2) Se ci sono in X due elementi $\overline{x}_i$, $\overline{x}_j$ che sono uguali

$\Rightarrow X$ é legata.

$$1\overline{x}_i + (-1)\overline{x}_j = \underline{0}$$

3) Se in X c'é un vettore che é multiplo di un altro $\Rightarrow$ X é legata.

$$\overline{x}_j = k\overline{x}_i \Rightarrow$$

$$-k\overline{x}_i + \overline{x}_j = \underline{0}$$

4) Se un vettore di $\overline{x}$ é c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ la seq. é legata.

OSS: 1) Sia X libera e $Y \subseteq X$

$\Rightarrow Y$ é libera.

2) Sia X legata e $X \subseteq Y$

$\Rightarrow Y$ legata.

DIM:

1) Sia $Y \subseteq X$. e siano

$(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t)$ gli elementi di Y

$(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_t \dots \bar{x}_n)$ gli elementi

di X

Se per assurdo Y fosse

legata $\Rightarrow \exists (\beta_1 \dots \beta_t) \neq (0 \dots 0)$

tali che

$$\beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_t \bar{x}_t = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_t \bar{x}_t + 0 \bar{x}_{t+1} + \dots + 0 \bar{x}_n = \underline{0}$$

non ho tutti i coeff $= 0 \Rightarrow X$ legata.

$\Rightarrow \mathcal{Y}$ perché X libera

2) Se $\mathcal{Y}$ contiene X che é legata per il punto precedente non puó essere $\mathcal{Y}$ libera $\Rightarrow$
$\mathcal{Y}$ legata $\square$

AGGIUNGERE VETTORI AD UNA SEQUENZA LEGATA $\rightarrow$ FORNISCE UNA SEQ. LEGATA.

TOGLIERE VETTORI AD UNA SEQ. LIBERA $\rightarrow$ FORNISCE UNA SEQ. LIBERA.