Spazi vettoriali

Siano $\mathbb{K}$ un campo, $(V,\oplus)$ un gruppo abeliano.
Allora $(V,\oplus)$ si dice spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se $\exists\, * : \mathbb{K}\times V \longrightarrow V$ tale che

1) $1_{\mathbb{K}} * \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v}\in V$

2) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall\bar{v}\in V:\ (\alpha\cdot\beta)*\bar{v} = \alpha*(\beta*\bar{v})$

3) $(\alpha+\beta)*\bar{v} = \alpha*\bar{v}\oplus\beta*\bar{v}$

4) $\forall \bar{v},\bar{w}\in V\ \forall\alpha\in\mathbb{K}:\ \alpha*(\bar{v}\oplus\bar{w}) = \alpha*\bar{v}\oplus\alpha*\bar{w}$

ESEMPI: 1) $\mathbb{K}(\mathbb{K})$ un campo come s. vett. su se stesso.

2) Se $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{K}'$ sono campi

allora $\mathbb{K}'(\mathbb{K})$ é s. vett. su $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ é sp. vettoriale su $\mathbb{R}$

3.1) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ é sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

3) $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}$ campo. é s. vettoriale rispetto $\oplus$ e $*$ definiti componente per componente.

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

$$\oplus : \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (a_1 \dots a_n), (b_1 \dots b_n) \rightarrow (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n) \end{cases}$$

$(\mathbb{K}^n, \oplus)$ é gruppo abeliano.

$$* : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \alpha, (a_1, \dots a_n) \longrightarrow (\alpha a_1, \alpha a_2 \dots, \alpha a_n) \end{cases}$$

[Vedremo che $\forall$ sp. vettoriale di dim finita è isomorfo a $\mathbb{K}^n$]

Verifichiamo che $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è spazio vettoriale con somma e prodotto per scalare definiti come prima.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

1) $(\mathbb{R}^3, \oplus)$ gruppo abeliano.

a) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad (a,b,c) \oplus (0\ 0\ 0) =$

$= (a+0\ \ b+0\ \ c+0) = (0+a\ \ 0+b\ \ 0+c)$

$= (a, b, c)$ el. neutro.

b) $\forall (a,b,c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$:

$(a,b,c) \oplus (a', b', c') = (a+a'\ \ b+b'\ \ c+c')$

$= (a'+a \quad b'+b \quad c'+c) = (a', b' \ c') \oplus (a \ b \ c)$

commutativa.

c) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ \exists \ (-a \ -b \ -c) \in \mathbb{R}^3:$

$(a \ b \ c) \oplus (-a \ -b \ -c) =$

$(a-a \quad b-b \quad c-c) = (0 \ 0 \ 0)$

inverso.

d) $\forall (a,b,c), (a' \ b' \ c'), (a'' \ b'' \ c'') \in \mathbb{R}^3$

$(a \ b \ c) \oplus [(a' \ b' \ c') \oplus (a'' \ b'' \ c'')] =$

$= (a \ b \ c) \oplus (a'+a'' \quad b'+b'' \quad c'+c'') =$

$= (a+(a'+a'') \quad b+(b'+b'') \quad c+(c'+c'')) =$

$= ((a+a')+a'' \quad (b+b')+b'' \quad (c+c')+c'') =$

$= [(a \ b \ c) \oplus (a' \ b' \ c')] \oplus (a'' \ b'' \ c'').$

assoc. $\square$

rispetto il prodotto per scalare

1) $1 * (a \ b \ c) = (1a \ 1b \ 1c) = (a \ b \ c)$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$(\alpha\beta) * (a \ b \ c) = ((\alpha\beta)a \ (\alpha\beta)b \ (\alpha\beta)c)$$

$$= (\alpha(\beta a) \ \alpha(\beta b) \ \alpha(\beta c)) =$$

$$= \alpha * (\beta a \ \beta b \ \beta c) =$$

$$= \alpha * (\beta * (a, b, c)).$$

3) $(\alpha + \beta) * (a \ b \ c) = ((\alpha+\beta)a \ (\alpha+\beta)b$
$(\alpha+\beta)c) =$

$$= (\alpha a + \beta a \ \ \alpha b + \beta b \ \ \alpha c + \beta c) =$$

$$= (\alpha a \ \alpha b \ \alpha c) \oplus (\beta a \ \beta b \ \beta c) =$$

$$= \alpha * (a \ b \ c) \oplus \beta * (a \ b \ c).$$

4) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall (a \ b \ c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha * [(a \ b \ c) \oplus (a' \ b' \ c')] =$$

$$\alpha * (a + a' \ \ b + b' \ \ c + c') =$$

$$= (\alpha(a+a') \ \alpha(b+b') \ \alpha(c+c')) =$$

$$= (\alpha a+\alpha a' \ \alpha b+\alpha b' \ \alpha c+\alpha c') =$$

$$= (\alpha a \ \alpha b \ \alpha c) \oplus (\alpha a' \ \alpha b' \ \alpha c') =$$

$$= \alpha * (a \ b \ c) \oplus \alpha * (a' \ b' \ c') \quad \square$$

funziona in modo analogo per $\mathbb{K}^n(\mathbb{K})$

- Esempio $\quad \mathbb{K}^{m,n}(\mathbb{K})$

$\mathbb{K}^{m,n}$ = insieme delle matrici $m \times n$ ad entrate in $\mathbb{K}$ con somma componente per componente e prodotto per scalare componente per componente.

sotto esempio $\mathbb{R}^{3,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

Esempio II :

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

e $$\mathbb{R}^4 = \{ (a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}.$$

Esempio ulteriore.

$\mathbb{K}$ = campo

$\mathbb{K}[x]$ = insieme dei polinomi nell'incognita x a coeff. in $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[x]$ con $\oplus$ = somma di polinomi

$$*: \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$$

$$\alpha\, ,\, p(x) = \sum_i p_i x^i \longrightarrow (\alpha p)(x) := \sum_i (\alpha p_i) x^i$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

(prodotto coeff. per coeff.)

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) ::= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}.$$

$$(f \oplus g) : \quad x \to f(x) + g(x)$$

$$\alpha * f \quad : \quad x \to \alpha f(x)$$

<u>N.B</u>: è possibile definire degli spazi vettoriali anche usando un prodotto per scalare/somma differenti:

$$A = \{ (a, b, 1) : a, b \in \mathbb{R} \}.$$

$$\oplus : \begin{cases} A \times A \longrightarrow A \\ (a,b,1), (c,d,1) \to (a+c, b+d, 1) \end{cases}$$

$$* : \begin{cases} \mathbb{R} \times A \longrightarrow A \\ \alpha, (a,b,1) \longrightarrow (\alpha a, \alpha b, 1) \end{cases}$$

oss: In generale la somma di scalari in $\mathbb{K}$ e la somma di vettori in $V(\mathbb{K})$ sono operazioni differenti!
Ove non ci sia ambiguità sull'input userò comunque sempre il simbolo $+$.
In particolare $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è la somma componente per componente (idem $\mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{m,n}$).

$$(a,b,c) \underset{\equiv}{+} (a' \; b' \; c') = (a \underset{\equiv}{+} a' \;\; b \underset{\equiv}{+} b' \;\; c \underset{\equiv}{+} c')$$

op. diverse

Similmente indicherò con $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ o da $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{m,n}$ il prodotto componente per componente.

$\alpha(a\ b\ c) = (\alpha a\ \alpha b\ \alpha c)$

ma invece che

$\alpha * (a\ b\ c) = (\alpha a\ \alpha b\ \alpha c)$

$$2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

vettor nullo = identità di $(V,+)$

1) In generale se $\alpha\bar{v} = \underline{0}$ cosa sono α e β?

2) fra $(-\bar{v})$ = vettore di V tale che $\bar{v} + (-\bar{v}) = \underline{0}$ e $-1\cdot\bar{v}$ con $-1 \in \mathbb{K}$ che legame c'è?

$\longleftrightarrow$

<u>Teorema</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vett. sul campo $\mathbb{K}$.
Se $\alpha * \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0$ oppure $\bar{v} = \underline{0}$

DIM (come la legge di ann. del prod per i campi).

- Se $\alpha = 0 \Rightarrow$

$$0 * \bar{v} = (0+0) * \bar{v} =$$
$$= 0 * \bar{v} \oplus 0 * \bar{v}$$

sommiamo a dx e sx

$(-0 * \bar{v}) \rightarrow$

otteniamo

$$\underline{0} = (-0 * \bar{v}) \oplus (0 * \bar{v}) =$$
$$= (-0 * \bar{v}) \oplus \left((0 * \bar{v}) \oplus (0 * \bar{v}) \right)$$
$$= \left[(-0 * \bar{v}) \oplus (0 * \bar{v}) \right] \oplus (0 * \bar{v}) =$$
$$= 0 * \bar{v}$$

- Supponiamo $\alpha * \bar{v} = \underline{0}$

se $\alpha = 0 \rightarrow$ fine

se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} : \alpha \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.

$$\alpha^{-1} * (\alpha * \bar{v}) = (\alpha^{-1} \alpha) * \bar{v} = 1_{\mathbb{K}} * \bar{v} =$$

$= \bar{v} \quad = \quad \alpha^{-1} * \underline{0}$

verifichiamo che questo è $\underline{0}$

$\alpha^{-1} * \underline{0} = \alpha^{-1} * (\underline{0} \oplus \underline{0}) =$

$= \alpha^{-1} * \underline{0} \oplus \alpha^{-1} * \underline{0}$

sommando a dx e sx

$-(\alpha^{-1} * \underline{0})$ otteniamo

$\alpha^{-1} * \underline{0} = \underline{0}$ $\square$

CONSEGUENZA

$(-1) * \bar{v} = -\bar{v}$

DIM:

$\bar{v} \oplus (-1) * \bar{v} =$

$= 1 * \bar{v} \oplus (-1) * \bar{v} =$

$= (1-1) * \bar{v} = 0 * \bar{v} = \underline{0}$

e quindi $(-1) * \bar{v}$ è l'opposto di $\bar{v}$.

$\square$

COMBINAZIONE LINEARE.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n \in V$

Si dice combinazione lineare dei vettori $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ mediante gli scalari $a_1 \ldots a_n$ il vettore

$$\boxed{\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n}$$

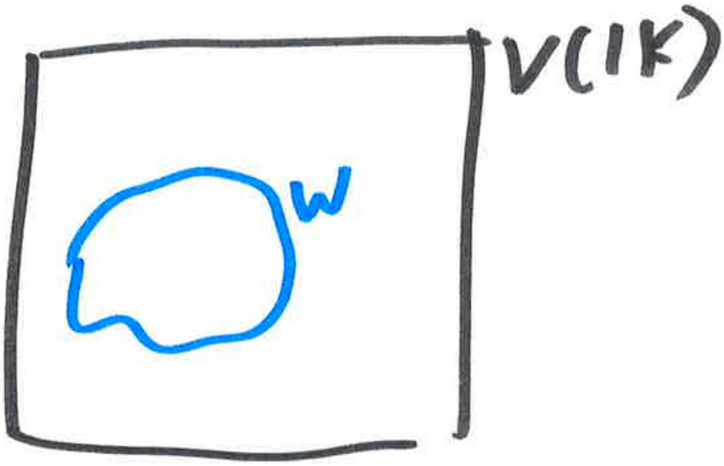
Uno s. vett. è una struttura algebrica

$V(\mathbb{K})$

- come fare a costruirla a partire da suoi elementi?
- come sono fatte le sottostrutture?
- come sono fatte le trasformazioni che preservano la struttura algebrica?

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $W \subseteq V(\mathbb{K})$

Si dice che W è sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ se esso soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale rispetto la restrizione troncata a W delle op. che definiscono $V(\mathbb{K})$.



$* : \mathbb{K} \times V \to V$

$\oplus : V \times V \to V$

$W \subseteq V(\mathbb{K})$ vogliamo def. su W una strutt. di spazio vettoriale.

$*' : \mathbb{K} \times W \to W$

$\oplus' : W \times W \to W$

→ proviamo a restringere e troncare le op. di V

partiamo da $* : \mathbb{K} \times V \to V$

e la vogliamo restringere

e troncare

$$*' := *^{W}_{\mathbb{K} \times W}$$

e similmente

$$\oplus : \cancel{\mathbb{K} \times} V \times V \to V$$

$$\oplus' := \oplus^{W}_{W \times W}$$

se possiamo fare queste op. e

W soddisfa gli assiomi di s. vett.

$\Rightarrow$ W é sottospazio.

<u>N.B</u> Serve che

$$\mathrm{Im}\left(*_{\mathbb{K} \times W}\right) \subseteq W$$

$$\mathrm{Im}\left(\oplus_{W \times W}\right) \subseteq W$$

CONDIZIONI NECESSARIE:

S1) $\forall \overline{w}_1 \in W, \alpha \in \mathbb{K}: \alpha * \overline{w}_1 \in W$

S2) $\forall \overline{w}_1, \overline{w}_2 \in W, \quad \overline{w}_1 \oplus \overline{w}_2 \in W$

CONDIZIONI DI CHIUSURA e sono anche suff. affinché $W \leq V(\mathbb{K})$

sottospazio vett!

DIM: Sia $W \leq V(\mathbb{K})$ e supponiamo che valgano (S1) e (S2).

MOSTRIAMO CHE
1) $(W, \oplus^{W}_{W \times W})$ é gruppo abeliano.

→ QUASI IMMEDIATA PERCHÉ.

$\forall \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3 \in W: \overline{w}_1 \oplus (\overline{w}_2 \oplus \overline{w}_3)$
$= (\overline{w}_1 \oplus \overline{w}_2) \oplus \overline{w}_3 \in W$

perché per (S2) é un elemento di W e l'associativa vale $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V$.

2) Sia $\bar{w} \in W \Rightarrow$ per (S1) $(-1) * \bar{w} =$
$= -\bar{w} \in W$

$\rightarrow$ l'inverso di ogni el. di W è in W.

3) Se $W = \{\underline{0}\}$ $\rightarrow$ fine perché W contiene el. neutro.
Altrimenti: sia $\bar{x} \in W \Rightarrow$ per 2 $-\bar{x} \in W \Rightarrow (-\bar{x}) \oplus \bar{x} = \underline{0} \in W$ per (S2).

Facciamo vedere che valgono gli altri assiomi di s. vett.

1) $\forall \bar{w} \in V$: $1_{\mathbb{K}} * \bar{w} = \bar{w}$ e quindi in particolare vale $\forall \bar{w} \in W$.

2) 3) 4) allo stesso modo: valgono $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{u}, \bar{w} \in V$ e quindi valgono $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{u}, \bar{w} \in W$.

$\rightarrow$ W è sp. vettoriale a patto che le operazioni mandino vettori di W in W. $\square$

Esempi in $\mathbb{R}^3$ in cui W può essere o non essere sottosp.

1) $W = \{(a, b, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

NON È SOTTOSPAZIO PERCHÉ

$(0\,0\,1) \in W$; $-1 \cdot (0\,0\,1) =$

$= (0\,0\,-1) \notin W$

2) $W = \{(a, 0\,0), (0, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

NON È SOTTOSPAZIO PERCHÉ

$\underset{\in W}{(1\,0\,0)} + \underset{\in W}{(0\,1\,0)} \notin W$

3) $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. $\not\subseteq \mathbb{R}^3$

$(W, +)$ é un gruppo abeliano.

perciò $\underset{\in \mathbb{R}}{\sqrt{2}} \cdot \underset{\in W}{(1\,0\,0)} = \underset{\notin W}{(\sqrt{2}\ 0\,0)}$

ATTENZIONE:

W in questo caso sarebbe spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ ma non é spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e quindi non é sottosp. di $\mathbb{R}^3$

Si può riformulare il teorema dicendo

$W \leq V(\mathbb{K})$ se e solamente se W é chiuso per combinazioni lineari

cioè: [ogni combinazione lineare di elementi di W appartiene a W.]