Def: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é detta <u>ortogonale</u> se $\boxed{A^{-1} = {}^tA.}$

- A é invertibile.
- $\det(A) = \pm 1$ infatti

$$1 = \det(I) = \det(A^{-1}A) =$$
$$= \det({}^tA\,A) = \det({}^tA)\det(A)$$
$$= \det(A)^2$$

Es in $\mathbb{R}^{2,2}$ $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Teorema: Una matrice reale é ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ essa é simmetrica.

$\Rightarrow$ 1) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con ${}^tA = A$ (simmetrica) é sempre diagonalizzabile.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 11 \\ 5 & 11 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Se ${}^{T}A = A \Rightarrow \exists P$ diagonalizzante

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

tale che ${}^{T}PAP = D = P^{-1}AP$

${}^{T}P = P^{-1}$.

DIM che A ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$ A simmetrica.

Supponiamo che $\exists P$ tale che $P^{-1} = {}^{T}P$ e

$P^{-1}AP = D =$

$\Rightarrow {}^{T}(P^{-1}AP) = {}^{T}D = D$ perché D diagonale

$\parallel$

${}^{T}P\,{}^{T}A\,{}^{T}P^{-1} = P^{-1}\,{}^{T}A\,P = P^{-1}AP$

moltiplicando a sx per P e a dx per P^{-1}

otteniamo ${}^{T}A = A \Rightarrow A$ simmetrica $\square$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2-K & 1 \\ K & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -K \end{bmatrix}$$

ORT. DIAG $\iff$ simmetrica (e reale).

$$-2-K = K \implies K = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

calcolo autovalori

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{= -1+\lambda + (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1]} =$$

$$\cancel{= \lambda - 1 + (1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda + 1]} =$$

$$(\lambda-1)+(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right]=$$

$$=(\lambda-1)\left[1+1-(2-\lambda)(1-\lambda)\right]=$$

$$\boxed{\lambda=1}$$

$$=(\lambda-1)\left[-\lambda^2+3\lambda-2+2\right]=$$

$$=(\lambda-1)\lambda(-\lambda+3)$$

$\lambda=1$
$\lambda=0$
$\lambda=3$

$$\boxed{\lambda=0} \qquad A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+x_2=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$$

$\cancel{x_1}$

$$x_3=-x_1$$
$$x_2=x_1$$
$$0=0$$

$$V_0=\mathcal{L}((1\ 1\ -1))$$

$$V_1=\{x \mid (A-I)x=\underline{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

$$V_1 = \mathcal{L}((0,1,1))$$

$$V_3 = \mathcal{L}((2,-1,1)) \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{x_1 = 2x_3}$$

$$\cancel{x_1 = -2x_2}$$

$$2x_3 2 \qquad \cancel{x_2 = -x_3}$$

$$2 + -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 + (-2)(2-1) = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

$$+x_1 - 2x_3 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_1$$

$$\cancel{x_3} \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1 - x_1 = 0$$

Una matrice diagonalizzante per A é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é una matrice diag. ortogonale per A? No!

$$P \cdot {}^{T}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & \dots \\ & \text{etc.} & \end{bmatrix}$$ non é l'identità.

$${}^{T}P \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \neq I$$

In generale P diagonalizza ma non é ortogonale.

Una matrice diagonalizzante ortogonale si ottiene da P dividendo ogni colonna per uno scalare opportuno

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} \qquad \Big\downarrow \sqrt{1^2+1^2} \qquad \Big\downarrow \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}$$

dividere per

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} = P'$$

← é una matrice ortogonale che ancora diagonalizza perché le colonne sono una base di autovettori.

$${}^tP' \cdot P' = P' \cdot {}^tP' = I$$

Teorema spettrale: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con $A = {}^tA \Rightarrow$ tutti gli autovalori di A sono reali.

Il teorema si dimostra lavorando sul campo complesso $\mathbb{C}$.

Richiami sulle proprietà di $\mathbb{C}$.

Consideriamo le matrici reali

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ed } i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e consideriamo lo spazio vett. generato da esse.

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

oss: sia $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$

con $(a,b) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

Tutte le matrici diverse dalla matrice nulla appartenenti a $\mathbb{C}$ sono invertibili.

Inoltre:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + b'a \\ -ab' - ba' & \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ba' - ab' & aa' - bb' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

$$(a\mathbb{1} + b \cdot i)(a'\mathbb{1} + b'i) =$$

$$= (aa' - bb') \cdot \mathbb{1} + (ab' + a'b)\, i$$

$$\in \mathbb{C}$$

In particolare $\mathbb{C}$ con le operazioni "+" = somma di matrici

"$\cdot$" = prodotto di matrici

é un campo in quanto

"$\cdot$" : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é una operazione associativa, con el. neutro, per cui ogni el. diverso dalla matrice nulla ammette inverso in $\mathbb{C}$ e che sulle matrici di $\mathbb{C}$ commuta.

(le prop. distributive rispetto la somma valgono sempre).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$

~~anch~~

<u>OSS</u>: In teoria $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{C}$

però si possono identificare gli elementi di $\mathbb{R}$ con gli elementi di $\mathbb{C}$ della forma $a \cdot 1$ e quindi vedremo $\mathbb{R}$ come sottinsieme di $\mathbb{C}$ e chiameremo gli elementi di $\mathbb{C}$ del tipo $a \cdot 1 + 0 \cdot i$ numeri reali.

chiameremo anche gli elementi di $\mathbb{C}$ del tipo $0 \cdot 1 + b \cdot i$ numeri immaginari puri.

$$\mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{C} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é un campo.

<u>Def</u>: Sia $z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ si dice coniugato di z l'elemento $\overline{z} = {}^t z$

$$z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

In generale $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ cioè $a + ib = a - ib$ che implica $b = 0$.

il coniugio é un automorfismo di $\mathbb{C}$ cioè

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \quad e \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

Siano $z_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ $z_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = {}^T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= {}^T\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + {}^T\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = {}^T\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= {}^T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot {}^T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} =$$

$= \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_1$ ma in $\mathbb{C}$ il prodotto è commutativo

$$= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$\Rightarrow$ Le proprietà viste ci dicono che se A e B sono opportune matrici con entrate in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

e similmente $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Se $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ed X autovettore di A di autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$
$$\overline{AX} = \bar{A}\bar{X}$$

Dunque $\bar{X}$ é autovettore di $\bar{A}$ di autovalore $\bar{\lambda}$.

Teorema fondamentale dell'algebra.

Il campo complesso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é algebricamente chiuso.

cioé

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado almeno 1 a coeff. in $\mathbb{C}$ nell'indeterminata x.

Allora $p(x)$ ammette almeno una radice $z \in \mathbb{C}$

cioè $\exists z \in \mathbb{C}$ con $p(z)=0$.

COROLLARIO: Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora $p(x)$ ammette esattamente n radici in $\mathbb{C}$. (a patto di contarle con le debite molteplicità).

DIM: Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $\deg p(x) = 1 \Rightarrow p(x) = ax+b$ con $a \neq 0$ ed $x = -b/a$ è radice.

Altrimenti ~~ma~~ ragioniamo per induzione.

HP: Se $\deg p(x) = n-1 \Rightarrow p(x)$ ammette $n-1$ radici.

$\overline{\exists}$: Se $\deg p(x) = n \Rightarrow p(x)$ ammette n radici.

prendiamo $p(x)$ con $p(x)$ di grado n; per il teorema fond. dell'algebra $\exists z \in \mathbb{C}$: $p(z) = 0$

$\Rightarrow$ per il teorema di Ruffini

$p(x) = (x - z)\, q(x)$ con $\deg q(x) = n-1$.

$\Rightarrow$ per ipotesi $q(x)$ ha $n-1$ radici e quindi $p(x)$ ha $(n-1)+1 =$
$= n$ radici in $\mathbb{C}$ $\square$

Il campo complesso <u>non</u> è ordinato.

Non è definita la relazione "$\leq$" fra numeri complessi!!

<u>N.B</u>: Una relazione di ordine $\precsim$ si può definire anche su $\mathbb{C}$, ad esempio l'ordine lessicografico cioè

$(a,b) \precsim (c,d) \iff a \leq c$ oppure
$a = c$ & $b \leq d$

ma questa relazione non è compatibile

con le operazioni algebriche.

(vorremmo $a \le b\ ,\ c \le d \Rightarrow a+c \le b+d$

e $0 \le c\ ,\ a \le b \Rightarrow ac \le bc$).

Ma su $\mathbb{C}$ non si può fare.

Supponiamo $\exists$ $\leq$ definito su $\mathbb{C}$ tale che

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \iff a \leq b$

e con la proprietà $\leq$ d'ordine totale e

$\forall x: 0 \leq x$; $a \leq b$ si abbia $ax \leq bx$.

Se $0 \leq i \Rightarrow i \cdot i = -1 \leq 0$

assurdo.

$i \leq 0 \Rightarrow i \leq 1$

moltiplicando per $-i$

$1 = -i^2 \leq -i$

e di nuovo

$-i \leq i^2 = -1$

$\Rightarrow 1 \leq -i \leq -1$ ↯

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Si dice norma di z il numero reale $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\det(z)}$

Infatti $z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0$

con $a, b \in \mathbb{R}$

N.B. Se z è reale $\Rightarrow$

$$\boxed{\|z\| = \sqrt{z^2} = |z|}$$

N.B. $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = \underline{1}$

Matrici reali e simmetriche.

Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = {}^{T}\!A \Rightarrow$ tutti gli autovalori di A sono reali

$$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(A)} m_a(\lambda) = n$$

Consideriamo $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$
ed osserviamo che una qualsiasi matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ può essere considerata come una matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ e che l'equazione caratteristica di A (che è un polinomio a coeff. reali di grado n) ammette sicuramente n radici (non necessariamente distinte) in $\mathbb{C}$.

In particolare A ~~[illegible]~~ ha autovalori in $\mathbb{C}$.

Vogliamo mostrare che gli autovalori complessi di A sono in realtà numeri reali

$A = {}^T\!A \qquad \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$

λ autovalore "complesso" di A

X autovettore in $\mathbb{C}^n$ che corrisponde all'autovalore λ.

CALCOLIAMO

$$\overline{\lambda}\,{}^T\overline{X}\,X = (\overline{\lambda}\,{}^T\overline{X})\,X =$$

$$= \overline{(\lambda\,{}^T X)}\,X =$$

$$= \overline{{}^T(AX)}\,X =$$

$$= {}^T\overline{X}\,{}^T\overline{A}\,X =$$ poiché $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ abbiamo $\overline{A} = A$

$$= {}^T\overline{X}\,{}^T\!A\,X =$$ poiché $A = {}^T\!A$

$$= {}^T\overline{X}\,A\,X = {}^T\overline{X}\,(AX) =$$

$$= {}^T\overline{X}\,\lambda\,X = \lambda\,{}^T\overline{X}\,X$$

$$\bar{\lambda}\,{}^T\bar{X}X = \lambda\,{}^T\bar{X}X \quad \text{ovvero}$$

$$(\bar{\lambda}-\lambda)\,{}^T\bar{X}X = 0$$

osserviamo che ${}^T\bar{X}X = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$$= \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

ma $\|x_i\|^2 \geq 0$ ed esso é $= 0$ se e solo se $x_i = 0$. Poiché X é un autovettore

$X \neq \underline{0} \Rightarrow {}^T\bar{X}X \neq 0 \Rightarrow \bar{\lambda} - \lambda = 0$

$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$ cioé $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Spazi vettoriali Euclidei e prodotti scalari

—

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale.

Una funzione $f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

é detta forma bilineare se:

$$\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{K}) \quad f(\bar{x}, -): \begin{cases} V_n \to \mathbb{K} \\ \bar{y} \to f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

$$\forall \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}) \quad f(-, \bar{y}): \begin{cases} V_n \to \mathbb{K} \\ \bar{x} \to f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

sono funzioni lineari, cioé

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V_n(\mathbb{K})$

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{z}) + \beta f(\bar{y}, \bar{z})$$

$$f(\bar{x}, \alpha\bar{y} + \beta\bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta f(\bar{x}, z)$$

forma $\equiv$ il codominio é $\mathbb{K}$.

$$\begin{matrix} \bar{x} \longrightarrow \\ \bar{y} \longrightarrow \end{matrix} \boxed{\;f\;} \longrightarrow \alpha = f(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{K}$$

se fissato un input $\Rightarrow$ la funzione $V \longrightarrow \mathbb{K}$ "che rimane" é una funzione lineare.

Esempio:

$$\mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}.$$

$$(x\ y\ z), (x', y', z') \longrightarrow (x\ y\ z)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= xx' + yy' + zz'.$$

$$f\left(\alpha(x\ y\ z) + \beta(x'\ y'\ z'), (x'', y'', z'')\right) =$$

$$= f\left((\alpha x + \beta x' \quad \alpha y + \beta y' \quad \alpha z + \beta z'), (x''\ y''\ z'')\right) =$$

$$= (\alpha x + \beta x')x'' + (\alpha y + \beta y')y'' + (\alpha z + \beta z')z'' = \dots$$

$$= \alpha(xx'') + \alpha(yy'') + \alpha(zz'') + \beta\left[x'x'' + y'y'' + z'z''\right] =$$

$= \alpha f((x\ y\ z), (x''\ y'', z'')) + \beta f((x', y', z'), (x''\ y'', z''))$

e similmente nel II termine.

Esempio II:

$$\begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b),(c,d) \longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

per le proprietà dei determinanti è bilineare.

In generale un determinante da $\mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione da $\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n$ che è n-multilineare.

(n input; se se ne fissano n-1 ci resta una forma lineare nell'input rimanente).

Sia $V_n(\mathbb{K})$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e
$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base e
$f : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

prendiamo
$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i \qquad \bar{y} = \sum_j y_j e_j \quad \in V_n(\mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\bar{x}, \bar{y})} = f\left(\sum_i x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$
$$= \sum_i f\left(x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$
$$= \sum_i x_i \, f\left(\bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$
$$= \sum_i \sum_j x_i \, f(\bar{e}_i, y_j \bar{e}_j) =$$
$$= \boxed{\sum_i \sum_j x_i y_j \boxed{f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)}}$$

Il valore di $f(\bar{x}, \bar{y})$ dipende solamente dai valori di $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ e le componenti dei vettori $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

per descrivere f basta dire quali sono i valori di f su coppie di elementi della base $\mathcal{B}$.

f è univocamente descritta dalla matrice

$$A = \left(\left(f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \right) \right)_{i,j=1}^{n}$$

A è detta matrice della forma f rispetto a $\mathcal{B}$.

si può calcolare il valore di f su $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ semplicemente mediante prodotti righe per colonne.

Siano

$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \sum y_j \bar{e}_j$$

due vettori

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) & \cdots & f(\bar{e}_1,\bar{e}_n) \\ \vdots & & \\ f(\bar{e}_n,\bar{e}_1) & \cdots & f(\bar{e}_n,\bar{e}_n) \end{pmatrix}$$

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) =$$

$${}^T X A Y$$

infatti

$$AY = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{e}_1,\bar{e}_j) y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} f(\bar{e}_n,\bar{e}_j) y_j \end{pmatrix}$$

$${}^T X A Y = \sum_i \sum_j x_i y_j f(\bar{e}_i,\bar{e}_j).$$

<u>OSS</u> cosa succede al cambiare della base.

Se abbiamo $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$

che legame c'è fra la matrice A che rappresenta una forma bilineare simmetrica rispetto a $\mathcal{B}$ e la matrice A' che rappresenta la medesima forma rispetto $\mathcal{B}'$?

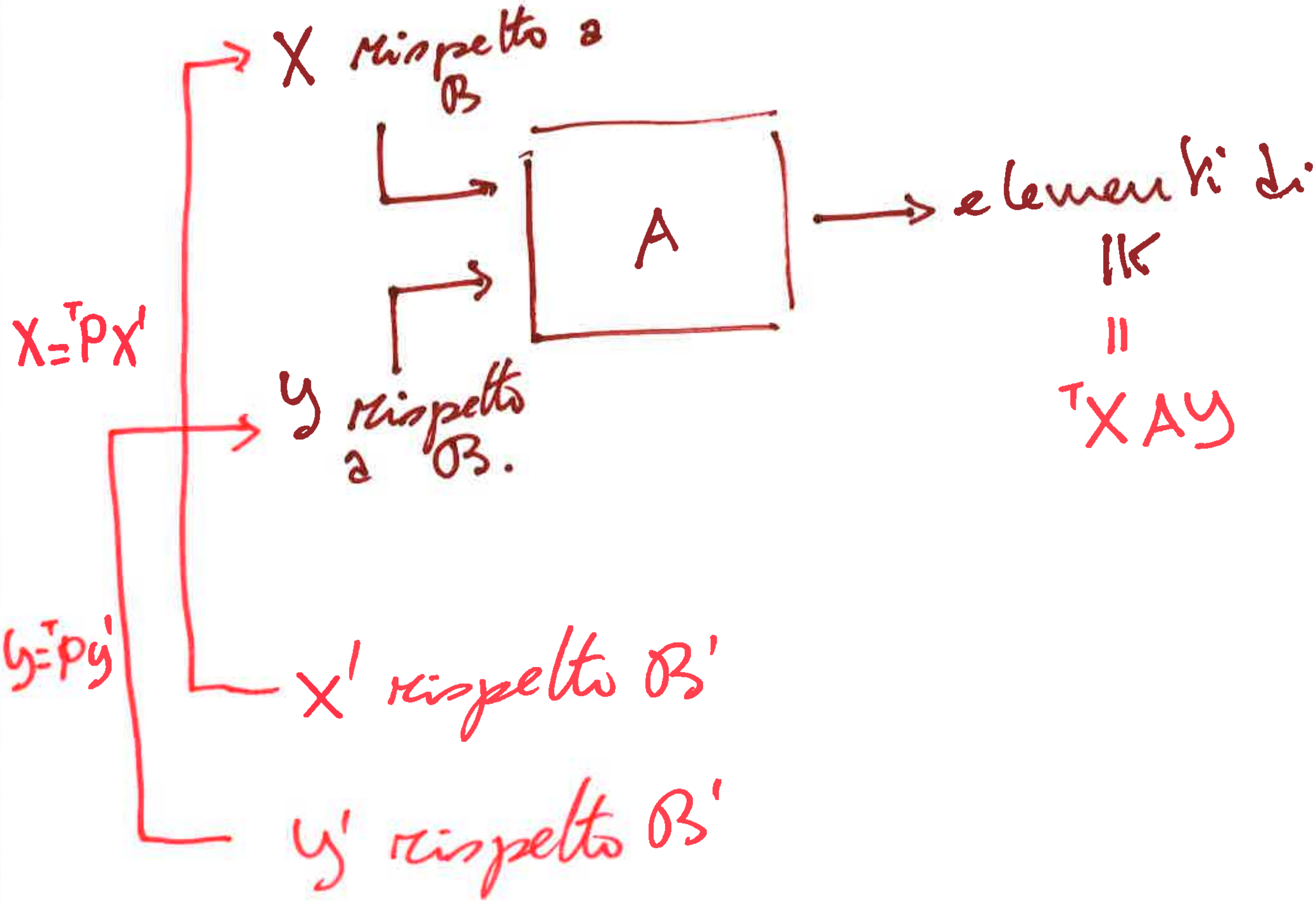
Sia P la matrice tale che

$$X = {}^tP\, X'$$

X': coordinate rispetto $\mathcal{B}'$

X: coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$$\boxed{\cancel{A'}} \qquad \boxed{A}$$



$$ {}^T X A Y = {}^T({}^T P X') A ({}^T P y') = $$

$$ = {}^T X' P A {}^T P y' $$

e quindi f rispetto $\mathcal{B}'$ è rappresentata dalla matrice $A' = P A {}^T P$

N.B: A' ed A **non** sono in generale matrici simili.

Def: Si dice rango di una forma bilineare $rk(A)$ ove A è una qualsiasi matrice che la rappresenta.

Una forma è non degenere se $\det(A) \neq 0$.

Una forma bilineare f è simmetrica se $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{K})$ $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$.

è ~~antis~~ alternante se ~~$f(\bar{x},\bar{y}) = -f(\bar{y}$~~ se $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ $\forall \bar{x} \in V(\mathbb{K})$.

N.B: Supponiamo f alternante $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, \bar{x}) \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{K}).$$

$$0 = f(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{x}+\bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}) =$$
$$= f(\bar{x}, \bar{x}) + f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x}) +$$
$$+ f(\bar{y}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x})$$

OSS 2: f è bilineare e simmetrica $\Leftrightarrow$ la matrice A che la rappresenta è simmetrica.

DIM:

f simmetrica $\Rightarrow f(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = f(\bar{e}_j,\bar{e}_i)$

$\forall i,j \Rightarrow A = {}^T A$

rispetto qualsiasi base.

Viceversa: se $A = {}^T A \Rightarrow$

$$f(\bar{x},\bar{y}) = {}^{*}({}^T X A Y) = {}^T({}^T X A Y) =$$

$$= ({}^T Y \, {}^T A X) = {}^T Y A X = f(\bar{y},\bar{x})$$

A simmetrica

$\square$