Coniche

- SINGOLARI → con un punto doppio

→ RIDUCIBILI nell'unione di 2 rette.

$\det(A) = 0$

→ 2 rette reali e distinte.

→ 2 rette imm. e coniugate (1 unico punto reale).

→ 1 retta reale contata 2 volte.

(cubiche α singolare ma non riducibile).

- GENERALI → $\det(A) \neq 0$

↓

PRIVE DI PUNTI DOPPI.

→ classificazione proiettiva.

- hanno punti reali
- non hanno punti reali.

→ se gli autovalori di A sono tutti dello stesso segno $(+,+,+)$ oppure $(-,-,-)$.
la conica non ha punti reali.
↓
il prod. scalare descritto da A è definito positivo o definito negativo.

→ ${}^tX A X = 0 \iff X = \underline{0}$

Una conica priva di punti reali è sempre generale.

(le curve algebriche sono "ben definite" su $\mathbb{C}$).

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -1$$

conica priva di pti reali.

→ se gli autovalori di A non hanno tutti lo stesso segno
$(++-)$ o $(--,+)$.

⇒ la conica $\mathcal{C}$ ha punti reali.
↓
ne ha ∞.

(una conica con 1 solo punto reale è riducibile nell'unione di 2 rette imm. e coniugate).

→ classificazione affine.

si studia cosa accade all'int. con $x_3 = 0$.

— coniche a centro = ellissi, iperboli

— coniche non a centro = parabole

CENTRO DI $\mathcal{C}$ = polo della retta impropria

$\mathcal{C}$ è <u>a centro</u> se il suo centro è un punto proprio.

$\mathcal{C}$ non è a centro ⇔ il suo centro appartiene ad $x_3 = 0$ ⇔ $\mathcal{C}$ è tangente alla retta impropria.

STUDIO INTERSEZIONI CON LA RETTA IMPROPRIA.

$\det(A^*) > 0 \to$ 2 pti imm. e coniugati $\to$ ellisse

$\det(A^*) = 0 \to$ 2 pti reali e coincidenti $\to$ tg $\to$ parabola

$\det(A^*) < 0 \to$ 2 pti reali e distinti. $\to$ iperbole.

OSS: lo studio delle int. con la retta $x_3 = 0$ si può fare anche studiando il prod. scalare indotto su di essa.

A reale e simmetrica $^{3\times3}$ associata al prod. indotto su $\mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3$

possiamo restringere il prodotto scalare a $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ considerando il sott. di eq. $x_3 = 0$

su $x_3=0$ il prodotto definito dalla restrizione ha matrice A^*

↓

possibili casi:

→ gli autovalori sono $(+,+)$ o $(-,-)$

⇒ il prod. scalare è definito

⇒ non ci sono punti autoconiugati reali ⇒ $\mathcal{C} \cap [x_3=0] =$ due punti imm. e coniugati

→ ellisse.

$\det(A^*) =$ prodotto autovalori >0

→ gli autovalori sono $(+,-)$

⇒ il prod. scalare è equivalente a quello della forma quadratica $\alpha_1^2 x_1^2 - \beta_1^2 x_2^2 = 0$

ove gli autovalori sono

$\lambda_1 = \alpha_1^2 \qquad \lambda_2 = -\beta_1^2$

$\alpha = \sqrt{\lambda_1} \qquad \beta = \sqrt{-\lambda_2}$

$\Rightarrow$ l'eq. si spezza.

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)(\alpha x_1 - \beta x_2) = 0$$

e ci sono 2 classi di soluzioni

$\rightarrow$ 2 pti reali e distinti

$\rightarrow$ iperbole $\iff \det(A^*) < 0$

$\rightarrow$ gli autovalori sono $(+,0)$ o $(-,0)$ $\Rightarrow$ prod. scalare equiv a quello della forma quad

$$\lambda x_1^2 = 0$$

$\rightarrow \exists!$ punto della conica con $x_3 = 0$

e $\det(A^*) = 0$.

__N.B.__ $(0,0)$ come segnatura è impossibile perché allora la matrice A della conica avrebbe rango al più 2 e la conica non sarebbe generale.

$(0,0) \Rightarrow [x_3 = 0] \subseteq \mathcal{C}$ perché ogni punto di $x_3=0$ sarebbe ortogonale a se stesso $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ riducibile $\Rightarrow \mathrm{rk}(A) \leq 2$.

Es. $n=3$ (quadriche)

$A \in \mathbb{K}^{4,4}$

vogliamo intersezione con $x_4 = 0$

$A^* \in \mathbb{K}^{3,3}$

ci sono punti o no?

$(+++)$, $(---)$ $\to$ NON ci sono PUNTI

$(++-)$, $(--,+)$ $\to$ ci sono ∞ punti che corrispondono ad una conica generale.

$(++,0)$, $(-,-,0)$

$(+,-,0)$

$(+\ 0\ 0)$ $(-\ 0\ 0)$

Forme canoniche

→ equazioni "facili" da trattare.

$$y = a x^2 + b\cancel{x} + c$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

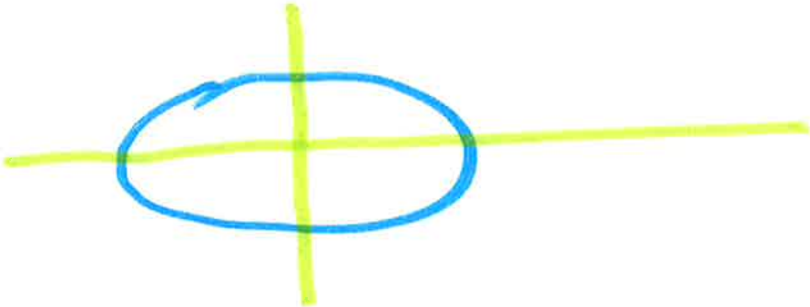
Ente geometrico descritto da una equazione in $AG(2,\mathbb{R})$

↓

l'eq. dipende dal riferimento fissato → cambiando riferimento cambia l'equazione ma non cambia l'ente geometrico.

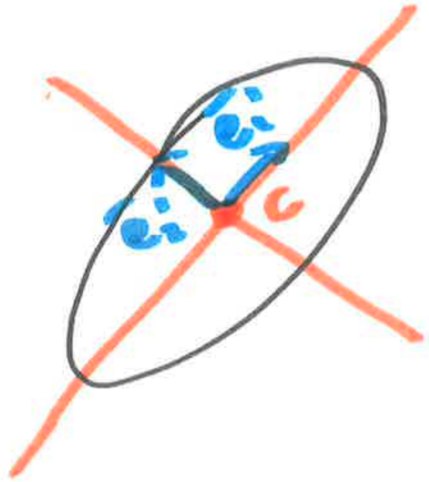
∃ dei riferimenti rispetto cui l'equazione di una conica è particolarmente semplice?

N.B. Se questi riferimenti vanno bene per tutta una famiglia di coniche
⇒ possiamo studiare le proprietà geometriche rispetto ad essi.



RIFERIMENTI CANONICI.

↳ sia $\mathcal{C}$ una conica a centro con C il suo centro
Prendiamo un riferimento affine in cui l'origine coincide con C e le direzioni ~~della~~ dei vettori della base coincidono con quelle degli assi della conica.
→ Si può sempre fare perché ogni conica a centro ha almeno 2 assi ortogonali.



$$\Gamma = (O, (\bar e_1, \bar e_2)) \to \Gamma' = (C, (\bar e_1', \bar e_2'))$$

Sia dunque $\mathcal{C}$ una conica il cui centro coincide con l'origine del riferimento Γ' e i cui assi sono paralleli rispettivamente alle rette ~~x~~ $x=0$ ed $y=0$.

Come è fatta l'equazione di $\mathcal{C}$?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

1)

$$(l, m, 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

equazione dei diametri:

$$(1\ 0\ 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(0\ 1\ 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (a_{12}\ a_{22}\ a_{23}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

centro $= (0,0)$ cioè $[(0\ 0\ 1)]$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0 \end{cases}$$

DEVONO AVERE COME SOLUZIONE

IL VETTORE $(0\ 0\ 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{13}=0$

$a_{23}=0 \quad \rightarrow$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

ASSI SONO $x=0$ ed $y=0$

IN PARTICOLARE IL POLO DI $x=0$ DEVE ESSERE IL PUNTO IMPROPRIO DI $y=0$ SE GLI ASSI SONO ?

CIOÉ $x=0$ DEVE ESSERE LA POLARE DI $[(1,0,0)]=X_\infty$ (pto improprio di $y=0$).

polare di $(1\,0\,0) \rightarrow$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=0$$

$\Rightarrow$ deve essere $a_{12}=0 \quad \rightarrow$

la matrice di $\mathcal{C}$ rispetto il nostro riferimento deve essere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

in particolare se

$a_{11} a_{22} > 0 \Rightarrow$ abbiamo una ellisse

$a_{11} a_{22} < 0 \Rightarrow$ abbiamo una iperbole.

Se vogliamo equazioni affini possiamo sempre dividere l'eq.

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} = 0$$ affine

per $-a_{33}$

$$\underbrace{-\frac{a_{11}}{a_{33}}}_{=\,\alpha} x^2 \underbrace{-\frac{a_{22}}{a_{33}}}_{=\,\beta} y^2 = 1$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$$

se α, β hanno lo stesso segno

$\Rightarrow$ ellisse posso scrivere

$$\alpha = \frac{1}{a^2} \qquad \beta = \frac{1}{b^2}$$

oppure la $\alpha = -\frac{1}{a^2}$, $\beta = -\frac{1}{b^2}$

$\rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ellisse con p.ti reali

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$ ellisse senza p.ti reali.

se hanno segni diversi:

$$\alpha = \frac{1}{a^2} \qquad \beta = -\frac{1}{b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

oppure $\alpha = -\frac{1}{a^2}$ $\beta = \frac{1}{b^2}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

equazioni delle iperboli.

→ circonferenza

→ parabole

ABBIAMO 2 DEFINIZIONI DI CIRCONFERENZA.

1) luogo dei punti a distanza R dal centro

2) conica che passa per $\bar{J}_\infty$ e J_∞ generale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrice conica a centro

che ~~passa~~ ha centro in $[(0\ 0\ 1)]$

Impongo il passaggio per

$J_\infty = [(1, i, 0)]$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$a_{11} + 2a_{12}i + a_{22} \cdot i^2 = 0$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} = 0 \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

una circonferenza ha eq. canonica del tipo

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) = -a_{33}x_3^2$$

equazione affine $\Rightarrow$ dividendo per a_{11} e ponendo $r_0 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$

$$\boxed{x^2+y^2=r_0}$$

$r>0$ ci sono punti reali

$r<0$ non ci sono punti reali.

Teorema: $\mathcal{C}$ è il luogo dei punti a distanza fissata r_0 dal centro.

DIM: mettiamoci in forma canonica ~~dtto~~

$P \in \mathcal{C} \iff P=(x,y)$ con

$$x^2+y^2=r$$

$$\iff d(O,P)^2 = x^2+y^2 = r.$$

ove O = centro della conica. $\square$

Forma canonica con la parabola.

pb → Abbiamo solo 1 asse e non abbiamo il centro come punto proprio.

→ riferimento euclideo con
ORIGINE = vertice della parabola.
ASSI paralleli all'asse della parabola e alla tangente nel vertice all'asse stesso.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$$

ASSE abbia equazione $x = 0$
⇒ pto. improprio dell'asse = pto. improprio della parabola $[(0\,1\,0)]$.

$$(0\ 1\ 0)\, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{12}\ \ a_{22}\ \ a_{23}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$a_{22} = 0$ ma $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$

$\Rightarrow a_{12} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la conica passa per il vertice che coincide con l'origine.

$$(0\ 0\ 1)\, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{a_{33} = 0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

la polare del punto $(0\ 0\ 1)$ é la retta $y = 0$

$$(0\,0\,1)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (a_{13}\;a_{23}\;0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}x + a_{23}y = 0$$

$$a_{13} = 0 \;; \quad a_{23} \neq 0$$

$$2a_{23}y + a_{11}x^2 = 0$$

$$y = \alpha x^2 \quad \text{con} \quad \alpha = -\frac{a_{11}}{2a_{23}}.$$

$$\alpha \neq 0$$

Le coniche a centro hanno forma canonica diagonale.

↓

corrisponde alla diagonalizzazione della matrice simmetrica ad esse associata? <u>No</u>, non esattamente.

Quando ci consideravamo le forme canoniche affini (o euclidee) i punti che sono all'infinito della conica devono restare all'infinito.

NOI APPLICHIAMO TRASFORMAZIONI DI $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ tali che la retta $x_3=0$ sia fissata.

$\rightarrow$ sono trasformazioni con una matrice che manda punti del tipo $[(l,m,0)]$ in punti del tipo $[(l',m',0)]$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l' \\ m' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$l p_{31} + m p_{32} = 0 \quad \forall l, m$$

$$\Rightarrow p_{31}=0 \quad p_{32}=0$$

In generale non possiamo usare matrici ortogonali arbitrarie se $x_3=0$ deve essere mandata in se stessa.

ma matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix} \quad (*)$$

[e non è detto che ci sia una matrice di questa forma ortogonale che diagonalizza la matrice della conica! → se è ort. deve avere anche $p_{13} = 0 = p_{23}$]

A cosa corrispondono le trasf. di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ con matrice del tipo (*) e perché potrebbero interessarci?

↓

sono trasformazioni che mandano punti di $AG(2,\mathbb{R})$ o $AG(2,\mathbb{C})$ in punti di $AG(2,\mathbb{R})$ o $AG(2,\mathbb{C})$.

In generale si parla di movimenti rigidi diretti del piano ~~AG~~ $EG(2,\mathbb{R})$ come le trasformazioni biiettive $EG(2,\mathbb{R}) \to EG(2,\mathbb{R})$ che preservano i prodotti scalari e mandano rette in rette (ed inoltre preservano l'orientamento).

→ ROTAZIONI

→ TRASLAZIONI

(→ RIFLESSIONI) (non sono dirette).

e loro composizioni.

$(x,y) \to \rho_\vartheta$ rotazione di ϑ rispetto l'origine

$$\rho_\vartheta : (x,y) \to \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(x,y) \to \tau_{l,m}$ traslazione di vettore (l,m) di P.

$$\tau_{l,m} : (x,y) \to (x+l, y+m).$$

~~riflessione rispetto a O di (x,y)~~

$$\cancel{\psi : (x,y) \to (-x,-y)}.$$

$$\cancel{\psi(x,y) = (-1}$$

Simmetria rispetto asse $x=0$

$$\sigma : (x,y) \to (-x,y)$$

$$(x,y) \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

le traslazioni non si rappresentano mediante matrici 2×2

ROTAZIONE ATTORNO AL PUNTO

$P=(a,b)$ di un angolo ϑ

$\tau_{a,b}\,\rho_{\vartheta}\,\tau_{-a,-b}$

1) portiamo P in O con $\tau_{-a,-b}$

2) ruotiamo attorno ad O di ϑ

3) riportiamo O in P con $\tau_{a,b}$.

Riflessione rispetto retta arbitraria.

1) traslaimo affinché un punto della retta sia l'origine τ_1

2) ruotiamo affinché la retta sia coincidente con $x=0$ ρ

3) applichiamo la simmetria $\cancel{\sigma}\ \sigma$

4) riruotiamo con ρ^{-1}

5) ritraslaimo la retta con τ_1^{-1}

(*) $\left[\tau_1^{-1}\rho^{-1}\sigma\,\rho\,\tau_1\right]$

descrive la trasformazione

1) Sapete lavorare su solo certi oggetti (simmetrie rispetto asse $x=0$; rotazioni rispetto O).

2) se volete lavorare con enti arbitrari dovete "spostarli dove si può lavorare" ($\rho\,\tau_1$) e poi rimetterli a posto ($\tau_1^{-1}\rho^{-1}$).

In coordinate affini (*) NON È UN PRODOTTO DI MATRICI.

NOI POSSIAMO PERÒ VEDERE DI LAVORARE CON MATRICI 3x3 IN COORDINATE OMOGENEE.

$[(x,y,1)]$

$$\rho_\vartheta[(x,y,1)] \to [(x',y',1)]$$

con $^T(x',y') = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\rho_\vartheta := \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\ell,m}[(x,y,1)] = [(x+\ell, y+m, 1)]$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+\ell \\ y+m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\forall x, y.$

$t_{33} = 1 \quad t_{31} = t_{32} = 0$

$t_{11}x + t_{12}y + t_{13} = x + \ell \Rightarrow t_{12} = 0 \quad t_{11} = 0 \quad t_{13} = \ell$

$t_{22} = 1 \quad t_{21} = 0 \quad t_{23} = m$

$$T_{l,m} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma : [(x,y,1)] \to [(-x,y,1)]$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mediante queste matrici

$$P_\vartheta \quad T_{l,m} \quad \Sigma$$

che

la composizione di movimenti si rappresenta come prodotto di matrici.

$r: \; x - y = 3$

iperbole con asintoto $\perp r$

$\rightarrow [(1,-1,0)] \in \mathcal{C}$.

$\uparrow$

dir. ortogonale ad r

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2$$

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 0$$

$$a^2 = b^2$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

Iperbole con asintoti paralleli alle rette $x+y=3$ $x+2y=5$.

R: $(x+y)(x+2y)=1$

CONICA IRRIDUCIBILE i cui PUNTI IMPROPRI SONO I PUNTI IMPROPRI DELLE 2 RETTE.

$$\begin{cases} (x_1+x_2)(x_1+2x_2)=x_3^2 \\ x_3=0 \end{cases}$$

ha come soluzioni

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

e con 1 come coeff. di x_3^2 è irriducibile.

$$(x+y-\alpha)(x+2y-\beta)=\gamma$$

centro = intersezione di $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$

$$C=(3,2).$$

$$x^2+3xy+2y^2-\alpha(x+2y-\beta)$$
$$-\beta(x+y)=\gamma$$

$$x^2+3xy+2y^2+(-\alpha-\beta)x$$
$$+(-2\alpha-\beta)y+\gamma'=0$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{2\alpha+\beta}{2} \\ -\frac{\alpha+\beta}{2} & -\frac{2\alpha+\beta}{2} & \gamma' \end{bmatrix}$$

polare di $(1\ 0\ 0)$ $\quad x+\frac{3}{2}y-\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

$(0\ 1\ 0)$ $\quad \frac{3}{2}x+y-\frac{2\alpha+\beta}{2}=0$

condizioni affinché $\mathcal{C}$ abbia come centro $(3,2)$.

$$3+\frac{3}{2}\cdot 2-\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\frac{3}{2}\cdot 3+2-\frac{2\alpha+\beta}{2}=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{2}=6 \\ \dfrac{2\alpha+\beta}{2}=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$ valori per (α,β)

$$\begin{cases} \alpha+\beta=12 \\ 2\alpha+\beta=13 \end{cases} \longrightarrow \alpha=1 \quad \beta=11$$

si sceglie un qualsiasi $\gamma\neq 0$.

$$(x+y-1)(x+2y-11)=1$$