Coniche in $AG(2,\mathbb{R})$ si classificano come

1) coniche riducibili $\det(A)=0$

- due rette distinte
  - → 2 rette immaginarie e coniugate → 1 punto reale.
  - → 2 rette reali e distinte:
    - 2.1) rette reali incidenti in un punto proprio
    - 2.2) rette reali e parallele.
    - 2.3) una retta reale propria + retta impropria.

$$x_3(ax_1+bx_2+cx_3)=0$$

$ax+by+c=0$ che ha $\deg = 1$

- una retta reale contata 2 volte.
  - → retta propria $(ax+by+c)^2=0$
  - → retta impropria $x_3^2=0$

2) coniche generali → irriducibili
$\det(A) \neq 0$

prive di punti doppi

→ $\det(A^*) > 0$: ellissi — 2 pti impropri imm. coniug

→ $\det(A^*) = 0$: parabole — 1 punto improprio contato 2 volte

→ $\det(A^*) < 0$: iperboli — 2 pti impropri reali e distinti

<u>OSS:</u> le uniche coniche che possono essere prive di punti reali sono le ellissi.

$$x^2+y^2=-1$$

→ studiare le coniche più in dettaglio → NOZIONI RELATIVE poli/polari.

$\det(A) \neq 0$

Sia $\mathcal{C}$ una conica di matrice A e sia $\perp_{\mathcal{C}}$ la relazione di coniugio rispetto a $\mathcal{C}$.

1) Si dice centro di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria $r_\infty : x_3 = 0$

2) Una conica $\mathcal{C}$ è detta a centro se il suo centro è un punto proprio $\equiv$ $\mathcal{C}$ non è tg. alla retta r_∞ $\equiv$ $\mathcal{C}$ è una ellisse o una iperbole. Le parabole sono dette coniche non a centro.

3) Si dice diametro di una conica ogni polare di un punto improprio $\equiv$ ogni retta che passa per il centro.

→ l'insieme di tutti i diametri per una conica a centro è un fascio proprio di rette; l'insieme dei diametri di una parabola è un fascio improprio.

4) Si dice **asintoto** di $\mathcal{C}$ una retta tangente **propria** a $\mathcal{C}$ in un **suo** punto improprio.

→ le parabole non hanno asintoti ($\exists!$ punto improprio e la tg per quel punto è r_∞).

→ le ellissi hanno 2 asintoti immaginari e coniugati.

→ le iperboli hanno 2 asintoti reali e distinti.

OSS: Gli asintoti sono polari di punti impropri $\Rightarrow$ passano per il centro della conica.

Se conoscere centro + punti impropri: calcolare gli asintoti corrisponde a calcolare le rette per il centro che hanno le direzioni assegnate.

In ambito euclideo $EG(2,\mathbb{R})$ definiamo anche.

5) Si dice **asse** di $\mathcal{C}$ una retta che è un diametro ortogonale al proprio polo.

a) Il polo di un diametro è un punto improprio $\Rightarrow$ è una direzione $\Rightarrow$ ha senso dire che una retta r è ortogonale ad esso

6) Si dice **vertice** di $\mathcal{C}$ ogni punto proprio di intersezione di $\mathcal{C}$ con un suo asse.

7) Si dice che $\mathcal{C}$ è una **circonferenza (generalizzata)** se $J_\infty = [(1,i,0)]$ e $\bar{J}_\infty = [(1,-i,0)]$ appartengono a $\mathcal{C}$. $\rightarrow$ in particolare $\mathcal{C}$ è una ellisse.

8) Si dicono fuochi di $\mathcal{C}$ i punti di intersezione propri delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ condotte per i punti $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$

→ Una circonferenza ha esattamente 1 fuoco ~~...~~ e questo coincide con il suo centro.

→ Una parabola ha esattamente 1 fuoco.

→ Ellissi ($\neq$ circonferenze) ed iperboli hanno 4 fuochi di cui 2 reali e 2 immaginari coniugati.

#

N.B I punti ciclici J_∞ e $\bar{J}_\infty$ sono "speciali" in $EG(2, \mathbb{R})$ ampliato e compl. perché corrispondono alle direzioni delle rette isotrope.
(Rette ove ogni 2 punti sono a $d=0$).

$\mathcal{C}$ conica $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

eq. del fascio dei diametri.

diametro = polare di un punto improprio =

$= [(l, m, 0)]^{\perp_{\mathcal{C}}}$

$$[\, l \;\; m \;\; 0 \,] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} (l a_{11} + m a_{12}) x_1 + (l a_{12} + m a_{22}) x_2 \\ + (l a_{13} + m a_{23}) x_3 = 0 \end{aligned}}$$

per ottenere il centro intersechiamo le rette per $(l, m) = (1, 0)$ con $(l, m) = (0, 1)$

$$\begin{cases} l a_{11} x_1 + l a_{12} x_2 + l a_{13} x_3 = 0 \\ m a_{12} x_1 + m a_{22} x_2 + m a_{23} x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0 \end{cases}$$

$\nearrow$

equazioni del centro.

Se la conica è a centro $\Rightarrow$

$$l(a_{11} x + a_{12} y + a_{13}) + m(a_{12} x + a_{22} y + a_{23}) = 0$$

$\downarrow$

fascio proprio.

Se la conica è una parabola

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

le eq. diventano del tipo

$$a_{11} x + a_{12} y + k = 0 \quad k \in \mathbb{R}.$$

fascio improprio.

Quando $\mathcal{C}$ è una circonferenza (generalizzata).

Quando $J_\infty \in \mathcal{C}$ (in effetti poiché $\mathcal{C}$ è reale $J_\infty \in \mathcal{C} \Rightarrow \bar{J}_\infty \in \mathcal{C}$ e quindi ci basta imporre che uno dei 2 punti ciclici ci appartenga!).

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + x_3(\ldots) = 0$$

sostituisco $(1, i, 0)$ ad $(x_1\ x_2\ x_3)$ ed ottengo.

$$a_{11} + 2a_{12} \cdot i + (-1)a_{22} = 0$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

$\downarrow$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = 0$$

l'equazione di una circ. generalizzata

è

$$a_{11}(x_1^2+x_2^2)+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$$

$\downarrow$ in coordinate affini

$$a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

N.B $\rightarrow$ generalizzata perché non è detto che sia di punti reali.

$$a_{11}\neq 0 \Rightarrow \quad x^2+2\frac{a_{13}}{a_{11}}x+\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}+$$

$$+\quad y^2+2\frac{a_{23}}{a_{11}}y+\frac{a_{23}^2}{a_{11}^2}-\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}+$$

$$+\quad\frac{a_{33}}{a_{11}}=0$$

$$\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}+\frac{a_{23}^2}{a_{11}^2}-\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

$\downarrow$

circonferenza di centro nel punto (α,β).

ci sono punti reali $\Leftrightarrow$

$$\alpha^2+\beta^2-\frac{a_{33}}{a_{11}}\geq 0$$

se $=0 \Rightarrow \exists!$ punto reale e $\mathscr{C}$ riducibile.

$>0 \Rightarrow$ circonferenza.

ABBIAMO MOSTRATO CHE PER UNA CONICA A CENTRO L'EQ. DE[illegible] DIAM. [illegible] È

$$(\ell a_{11}+m a_{12})x+(\ell a_{12}+m a_{22})y+\dots=0$$

In particolare il vettore $\bar{n}=(\ell a_{11}+m a_{12},\ \ell a_{12}+m a_{22})$

é perpendicolare al diametro di polo $[(\ell, m, 0)]$.

→ IMPORRE CHE un diametro sia $\perp$ al proprio polo corrisponde a dire

$$\begin{vmatrix} \ell a_{11} + m a_{12} & \ell a_{12} + m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell m a_{11} + m^2 a_{12} - \ell^2 a_{12} - \ell m a_{22} = 0$$

$$\ell m a_{11} + (m^2 - \ell^2) a_{12} - \ell m a_{22} = 0$$

1) Se $a_{11} = a_{22}$ & $a_{12} = 0 \Rightarrow$ l'eq. é sempre soddisfatta $\Rightarrow \forall$ diametro é asse. $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ é una circonferenza.

2) in generale l'equazione é di II grado

in generale ci saranno 2 assi:

~~a) ganda~~

l'equazione in l, m è

$$m^2 a_{12} + lm(a_{11} - a_{22}) - l^2 a_{12} = 0$$

~~a_{12}~~ OSSERVIAMO CHE LE SOLUZIONI DI QUESTA EQ. DEVONO ESSERE TALI CHE IL LORO PRODOTTO DIA -1 infatti supponiamo

$l \neq 0 \Rightarrow$ dividiamo per l^2

$$\Rightarrow \xi^2 a_{12} + \xi(a_{11} - a_{22}) - a_{12} = 0$$

e questo implica che per le soluzioni ξ_1, ξ_2 il prodotto

sia $\xi_1 \xi_2 = -\frac{a_{12}}{a_{12}} = -1$.

per una conica a centro gli assi sono 2 e sono ort. fra

Coro.

[se $m \neq 0$ e $l = 0$ si ragiona in modo analogo e si vede che gli assi devono proprio essere paralleli agli assi coordinati $x=0$ e $y=0$

$$m^2 a_{12} + lm(a_{11} - a_{22}) - l^2 a_{12} = 0$$

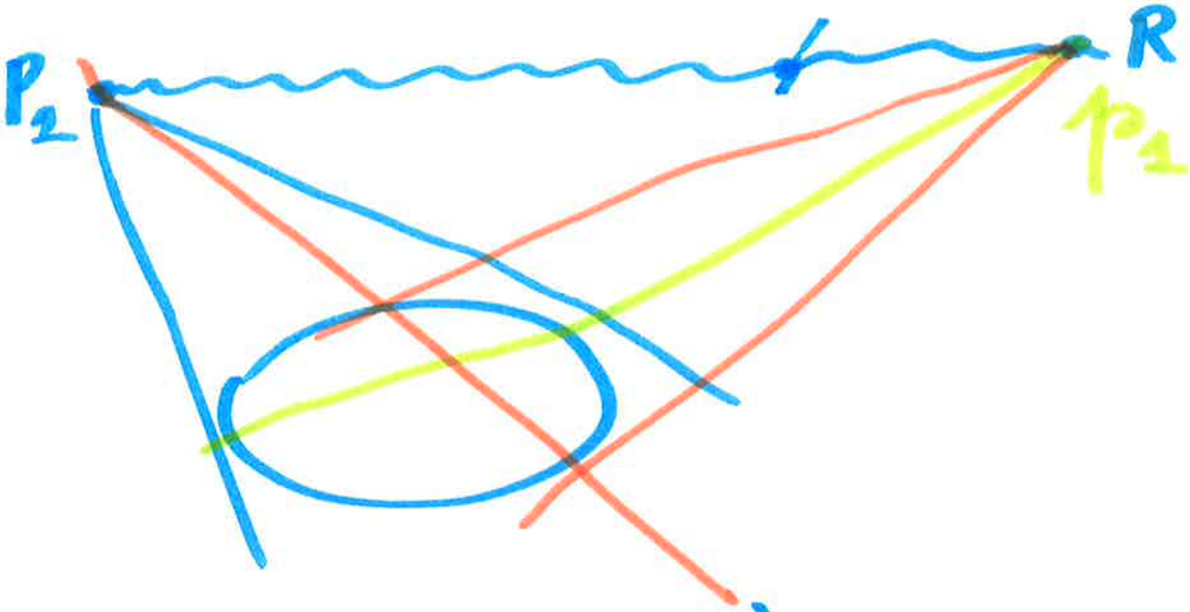
abbia soluzione $l = 0$ $\Rightarrow$

$a_{12} = 0$ e vedete che

vi resta solo $lm(a_{11} - a_{22}) = 0$

da cui l'altra famiglia di soluzioni è $m = 0$, $l \neq 0$.]

<u>OSS</u>: Che gli assi siano ortogonali fra loro quando sono esattamente 2 viene anche da considerazioni geometriche.



Sia p_2 un asse di
polo P_1 e punto improprio
R $\Rightarrow$ poiché p_2 asse $R \perp P_1$
per il principio di reciprocità
la polare di R cioè $r_0 = R^{\perp e}$
deve passare per il polo di p_1
cioè P_1 $\Rightarrow$ il punto improprio
della polare di R deve essere
P_1 e quindi è ortogonale alla
direzione di r_0 $\Rightarrow$ r_0 è un asse.

SOLUZIONE B per la parabola.

consideriamo una parabola di eq. $\boxed{{}^tXAX=0 \text{ con } a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.}$

calcoliamo il suo centro (pto. improprio).

centro = unico punto improprio della parabola.

Interseghiamo $\mathcal{C}$ con $x_3=0$

$$\begin{cases} {}^tXAX=0 \\ x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$\Delta=0$

risolviamo l'equazione

$$x_1=\frac{-a_{12}}{a_{11}}x_2 \qquad x_3=0$$

$[(-a_{12},a_{11},0)]$

verifichiamo:

$$\boxed{a_{11} \cdot a_{12}^2 - 2 a_{12}^2 a_{11} + a_{22} a_{11}^2 = 0}$$

$$a_{11} a_{22} = a_{12}^2$$

ottengo

$$a_{11} a_{12}^2 - 2 a_{12}^2 a_{11} + a_{11} a_{12}^2 = 0$$

<u>OK</u> Il centro dunque è

$$[(-a_{12}, a_{11}, 0)] = e$$

vogliamo trovare la retta il cui polo è $\perp$ al centro.

→ questa è la retta il cui polo è $[(a_{11}, a_{12}, 0)] = e^{\perp}$

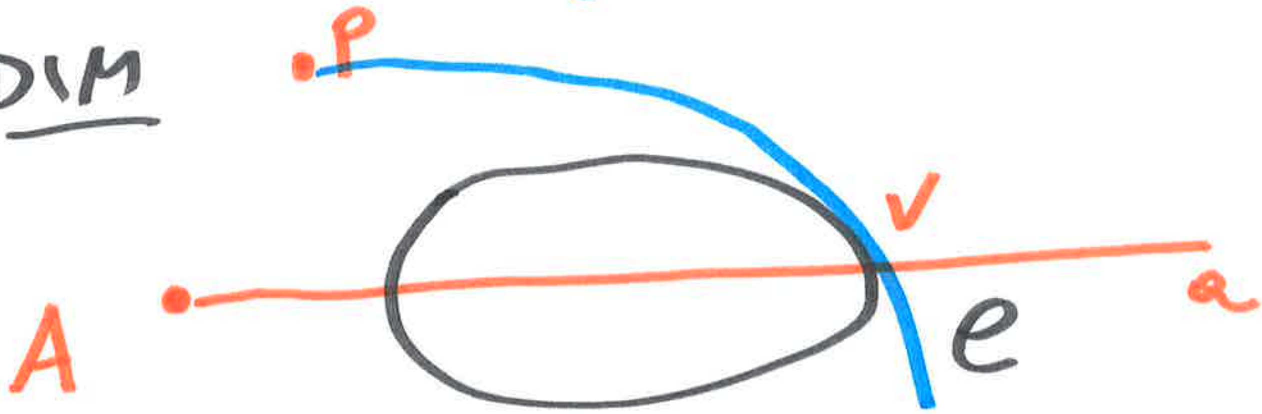
→ calcoliamo la polare di questo punto → asse della conica. (che è unico).

$$a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

→ ∃! asse.

Teorema: Sia V un vertice di una conica generale $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ la tangente a $\mathcal{C}$ in V è ortogonale all'asse che passa per V (cioè al diametro per V).

DIM



a = asse per V di punto improprio A e polo P con $P \perp A$ $\Rightarrow$ la tg. a $\mathcal{C}$ in V deve passare per il polo di A perché $V \in a \Rightarrow$ la polare di V passa per $P \Rightarrow$ la tg. a $\mathcal{C}$ in V è $\perp a$. $\square$