Studio delle coniche

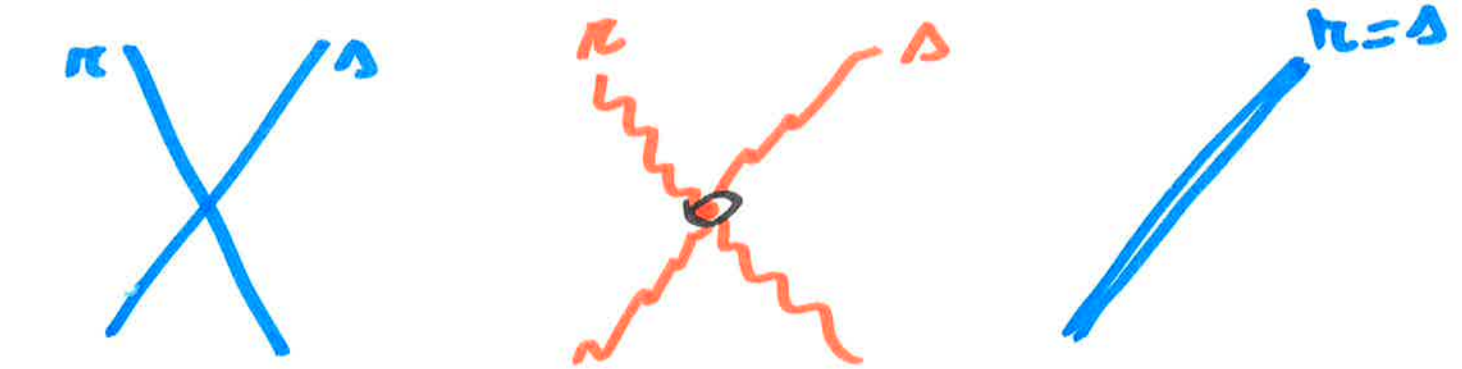
→ $\mathcal{C}$ conica ha almeno un pto. doppio

$\iff$ $\mathcal{C}$ è riducibile nell'unione di 2 rette.

A) 2 rette di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di che tipo?

B) come riconoscere i punti multipli?

A) 3 possibilità.



$\mathcal{C} = r \cup s$

r ed s reali e distinte.

$F = G \cdot H$

con $\deg G = \deg H = 1$

$\mathcal{C} = r \cup \bar{r}$

$s = \bar{r}$

2 rette imm. coniug.

$F = G \cdot \bar{G}$

↓

l'eq. $G=0$ non è reale.

$\mathcal{C} = r \cup r$

$r = s$: retta contata 2 volte → ogni pto di $\mathcal{C}$ è doppio

$F = G^2$

Oss. Siccome $\mathcal{C}$ ha equazione reale se un polinomio $G(x_1 x_2 x_3)$ divide $F(x_1 x_2 x_3)$

$\Rightarrow \overline{G}(x_1 x_2 x_3)$ divide $\overline{F}(x_1 x_2 x_3) = F(x_1 x_2 x_3)$.

$\Rightarrow$ Se $\mathcal{C}$ contiene una retta imm.
$\Rightarrow$ essa deve contenere anche la sua coniugata.

$\rightarrow$ in particolare se $\mathcal{C}$ contiene r immaginaria e $\mathcal{C}$ conica
$\Rightarrow \mathcal{C} = r \cup \overline{r}$. $\square$

Def: Una conica $\mathcal{C}$ è detta generale se priva di punti doppi.
Similmente una curva algebrica è detta irriducibile $\Leftrightarrow$ essa non è unione di 2 curve algebriche distinte. $\rightarrow$ le sue eq. non si fattorizza.

[Una conica è irriducibile $\iff$ è generale.]

cubica con punto doppio ed irriducibile

cubica riducibile con pto. triplo

cubica rid. con 3 punti doppi.

B) come riconoscere i punti doppi.

→ Bisogna nel teorema dell'ordine imporre che per un certo punto $\forall$ le rette abbiano intersezione almeno 2 con la curva.

Eq omogenea $P \in \mathcal{C}$. Eq. generica retta per P a sistema con eq. di $\mathcal{C}$ → si impone che le coord di P siano sol. multipla dell'eq.

Teorema: Sia $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$ una curva algebrica piana.

Allora $P = [(x_1' \, x_2' \, x_3')]$ è punto multiplo per $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} F(P) = 0 & (P \in \mathcal{C}). \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P = 0 & \nabla F(P) = \underline{0} \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P = 0 \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P = 0 \end{cases}$$

Tutte le derivate parziali di F calcolate in P sono nulle.

N.B: Se

$$F(x_1 x_2 x_3) = \sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j}$$

polinomio omogeneo.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum_{i>0} i\, a_{ij} x_1^{i-1} x_2^j x_3^{n-i-j}$$

e similmente per $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial F}{\partial x_3}$.

In particolare se

$$F(x_1 x_2 x_3) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11} x_1 + 2a_{12} x_2 + 2a_{13} x_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12} x_1 + 2a_{22} x_2 + 2a_{23} x_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13} x_1 + 2a_{23} x_2 + 2a_{33} x_3. \end{cases}$$

(*) si legge come $AX = \underline{0}$

ove $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

mentre l'eq. della conica si può scrivere come

$$^{t}X A X = 0$$

In particolare se P è un punto di coordinate X' con $AX' = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $^{t}X' A X' = 0$ e quindi $P \in \mathcal{C}$.

Teorema: Un punto della conica di equazione $^{t}XAX = 0$ è doppio $\Leftrightarrow$ le sue coordinate omogenee sono autosoluzione di $AX = \underline{0}$.

CONSEGUENZA: Il polinomio ^{t}XAX è fattorizzabile $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

${}^tXAX$ si fattorizza $\iff$ la conica $\mathcal{C} = \tilde{V}({}^tXAX)$ è riducibile $\iff$ $\mathcal{C}$ ha almeno un pto doppio $\iff$ $AX = \underline{0}$ ammette autosoluzioni $\iff$ $\det(A) = 0$.

<u>OSS</u>: Ad ogni conica $\mathcal{C}$ noi possiamo associare una matrice (reale) e simmetrica A.

$\downarrow$

Ad ogni matrice reale e simmetrica è associato un prodotto scalare.

$\downarrow$

Ad ogni conica $\mathcal{C}$ è associato un prodotto scalare $\cdot_{\mathcal{C}}$ con ortogonalità definita da $\perp_{\mathcal{C}}$

Che legame esiste fra le 2 cose?

<u>N.B.</u> Il prod. scalare associato a $\mathcal{C}$ è definito a meno di proporzionalità

purchè l'eq. di $\mathcal{C}$ è definita
a meno di proporzionalità;
cioè: se A è una matrice
reale e simmetrica associata a $\mathcal{C}$
$\Rightarrow$ anche αA con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
è una matrice associata a $\mathcal{C}$.

$\rightarrow$ COMUNQUE $\perp_{\mathcal{C}}$ non dipende dalla
proporzionalità: infatti

$${}^{t}X'AX'' = 0 \iff$$

$${}^{t}X'\alpha(A)X'' = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Il valore di ${}^{t}X'AX''$ in sè
non ha significato geometrico,
ma la relazione $\perp_{\mathcal{C}}$ cioè

$${}^{t}X'AX'' = 0 \quad \text{o meno}$$

ha un senso geometrico.

$$2x_1x_2 + x_3^2 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$4x_1x_2 + 2x_3^2 = 0 \qquad A' = \begin{pmatrix} 0&2&0 \\ 2&0&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}(2x_1x_2 + x_3^2) = \tilde{V}(4x_1x_2 + 2x_3^2).$$

$$(1\,1\,1)A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (1\,1\,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3$$

$$(1\,1\,1)A'\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = (1\,1\,1)\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 6$$

<u>Def</u>: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e $\perp_{\mathcal{C}}$ la relazione di ortogonalità indotta da $\mathcal{C}$.

Per ogni punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si dice <u>polare</u> di P la retta $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ e per ogni retta r di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ si dice polo di r_0 il punto $r_0^{\perp e}$

$\det A \neq 0$

OSS: Se $P = [(x_1' \; x_2' \; x_3')]$

$$\Rightarrow P^{\perp e} = \{[X] \mid (x_1' \; x_2' \; x_3') A X = 0\}$$
$$X \neq \underline{0}$$

in particolare $P^{\perp e}$ sarà formato dai punti le cui coordinate omogenee sono contenute in uno s. vettoriale di dim $= 3-1 = 2 \to$ è una retta.

Viceversa: Sia r_0 una retta $\Rightarrow$ $r_0^{\perp e}$ è dato dall'insieme dei punti le cui coord. omogenee sono contenute in un sott. vett. di dim $3-2 = \underline{1} \to$ è un punto.

Def: Si dice che 2 punti P e Q sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}$ quando $P \in Q^{\perp_\mathcal{C}}$.

Oss: Se $P \in Q^{\perp_\mathcal{C}} \Rightarrow$

$$ {}^tPAQ = 0 \Rightarrow {}^tQ\,{}^tA\,P = {}^tQAP = 0 $$

$$ \Rightarrow Q \in P^{\perp_\mathcal{C}}. $$

La relazione di coniugio è simmetrica.

P è detto autoconiugato (rispetto a $\mathcal{C}$) $\Leftrightarrow P \in P^{\perp_\mathcal{C}}$

→ L'insieme dei punti autoconiugati di $\mathcal{C}$ coincide con l'insieme dei punti di $\mathcal{C}$.

$$ P \in P^{\perp_\mathcal{C}} \Leftrightarrow {}^tPAP = 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{C}. $$

I punti autoconiugati sono anche i punti isotropi per $\perp_\mathcal{C}$.

1) Sia $P \in \mathcal{C}$. Che cosa è la polare di P rispetto a $\mathcal{C}$?

→ consideriamo 2 punti

$P = [{}^t(x_1' \; x_2' \; x_3')]$ $\quad Q = [{}^t(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')]$

di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ e vogliamo studiare l'intersezione della retta PQ con $\mathcal{C} = V({}^tXAX)$.

$$X = \lambda\,{}^t(x_1' \; x_2' \; x_3') + \mu\,{}^t(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

eq. parametrica retta per P e Q.

$$ {}^tXAX = [\lambda\,(x_1' \, x_2' \, x_3') + \mu\,(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')] $$
$$ \cdot A \cdot [\lambda\,{}^t(x_1' \; x_2' \; x_3') + \mu\,{}^t(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')] $$
$$ = (\lambda\,{}^tX' + \mu\,{}^tX'')A(\lambda X' + \mu X'') = $$

$$= \lambda^2({}^t X' A X') + \mu^2({}^t X'' A X'') +$$
$$\lambda\mu({}^t X' A X'' + {}^t X'' A X') =$$

(*) $$\boxed{= \lambda^2({}^t X' A X') + 2\lambda\mu({}^t X' A X'') + \mu^2({}^t X'' A X'')}$$

(λ, μ) sono soluzioni di $(*)=0$
$\Leftrightarrow \lambda X' + \mu X'' \in \mathcal{C}$.

Supponiamo $Q \in \mathcal{C} \Rightarrow$ l'eq. diventa

$$\lambda^2({}^t X' A X') + 2\lambda\mu({}^t X' A X'') = 0$$

in quanto ${}^t X'' A X'' = 0$

vogliamo ora trovare tutti i punti P tali che la retta QP interseca la conica in Q 2 volte.

→ vogliamo trovare tutti i punti P tali che $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ sia soluzione doppia di (Δ) $\lambda^2 ({}^t X' A X') + 2\lambda\mu ({}^t X' A X'') = 0$

⇒ otteniamo che deve essere $\lambda = 0$ soluzione doppia.

e quindi $\boxed{({}^t X' A X'') = 0}$ (**).

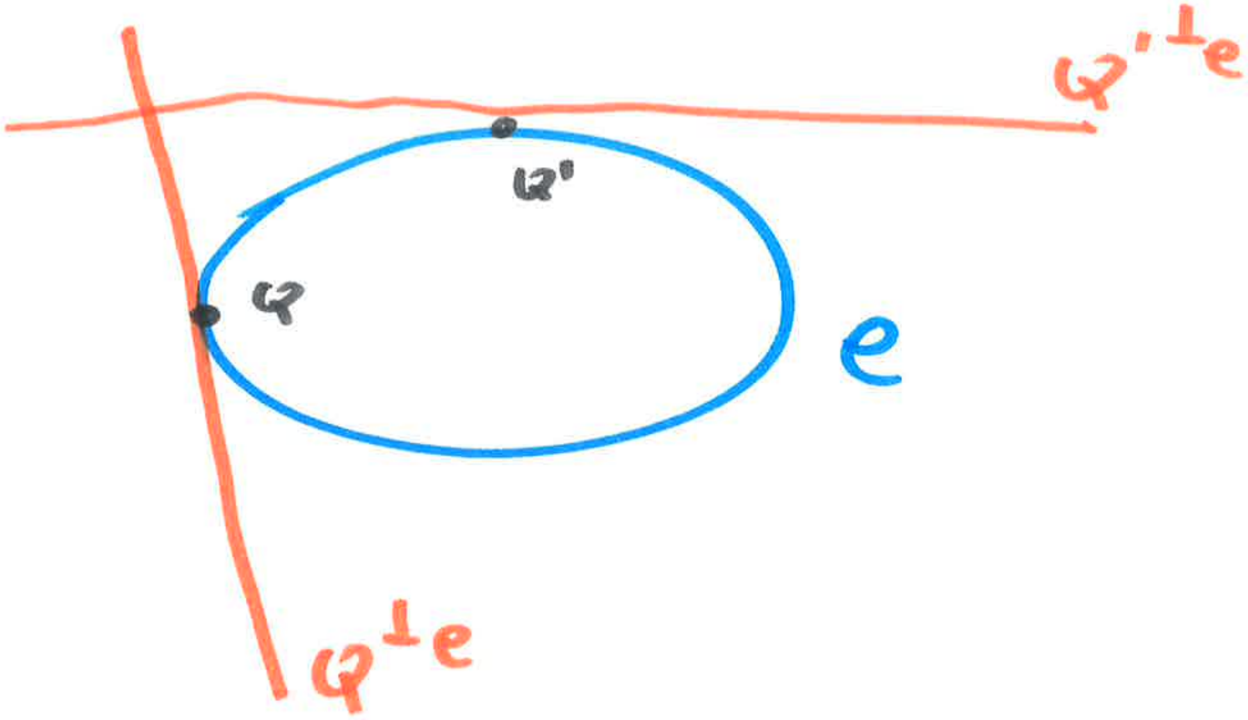
(Δ) $$\xi^2 ({}^t X' A X') + \xi ({}^t X' A X'') = 0$$

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu}$$

ha soluzione $\xi = 0$ doppia

$\Leftrightarrow ({}^t X' A X'') = 0$

[(**) ci dice che il luogo dei punti sulla retta tangente per Q alla conica e coincide con il luogo $Q^{\perp e}$ → la polare di Q rispetto a e.]



$$F(x_1\ x_2\ x_3)=0$$

A matrice associata

$P = [{}^t(x_1'\ x_2'\ x_3')]$ punto di e

retta tg. a e in P ha

eq. $\quad {}^tPAX = 0$

$$(x_1'\ x_2'\ x_3')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$$+\begin{pmatrix} x_1' a_{11} + x_2' a_{12} + x_3' a_{13} \\ x_1' a_{12} + x_2' a_{22} + x_3' a_{23} \\ x_1' a_{13} + x_2' a_{23} + x_3' a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\nabla F|_P \cdot (x_1 \; x_2 \; x_3) = 0$$

$$x_1(x_1' a_{11} + x_2' a_{12} + x_3' a_{13}) +$$
$$x_2(x_1' a_{12} + x_2' a_{22} + x_3' a_{23}) +$$
$$x_3(x_1' a_{13} + x_2' a_{23} + x_3' a_{33}) = 0$$

$\downarrow$ affini.

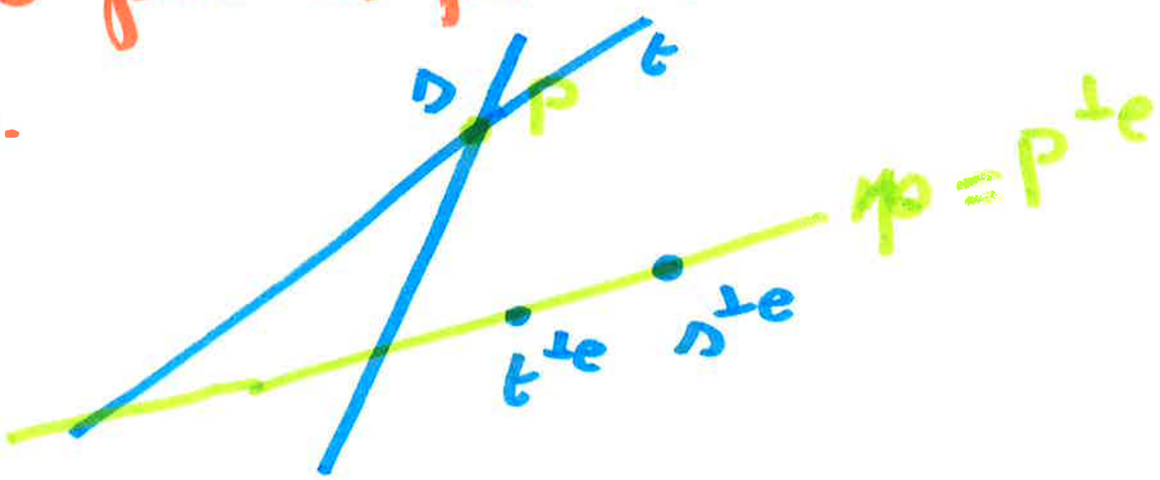
$$x(x_P a_{11} + y_P a_{12} + a_{13}) +$$
$$+ y(x_P a_{12} + y_P a_{22} + a_{23}) +$$
$$(x_P a_{13} + y_P a_{23} + a_{33}) = 0$$

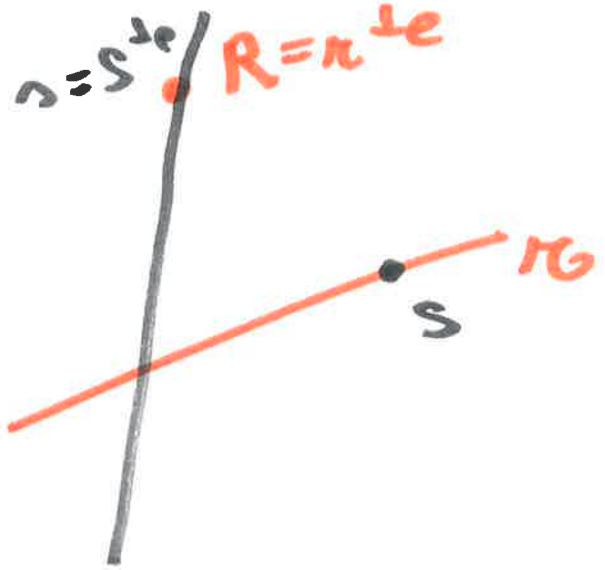
Teorema (principio di reciprocità).

Sia $\mathcal{C}$ una conica e $\perp_e$ la relazione di ortogonalità ad essa associata (polarità).

Dato un punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$, i poli delle rette passanti per P appartengono alla retta polare $p = P^{\perp_e}$ di P.

Viceversa, le rette polari dei punti di una retta r tutte passano per il polo $R = r^{\perp_e}$ di r.





<u>DIM</u>: La relazione "essere coniugati rispetto a $\mathcal{C}$" è simmetrica.

In particolare sia P un punto ed r una retta per P.

Allora il polo di r è $r^{\perp e}$

e $P \in r \Rightarrow r^{\perp e} \subseteq P^{\perp e} \Rightarrow$ il polo di r è un punto $R \in p = P^{\perp e}$ che è la polare di P.

Viceversa: Sia $S \in r \Rightarrow r^{\perp e} \subseteq S^{\perp e}$

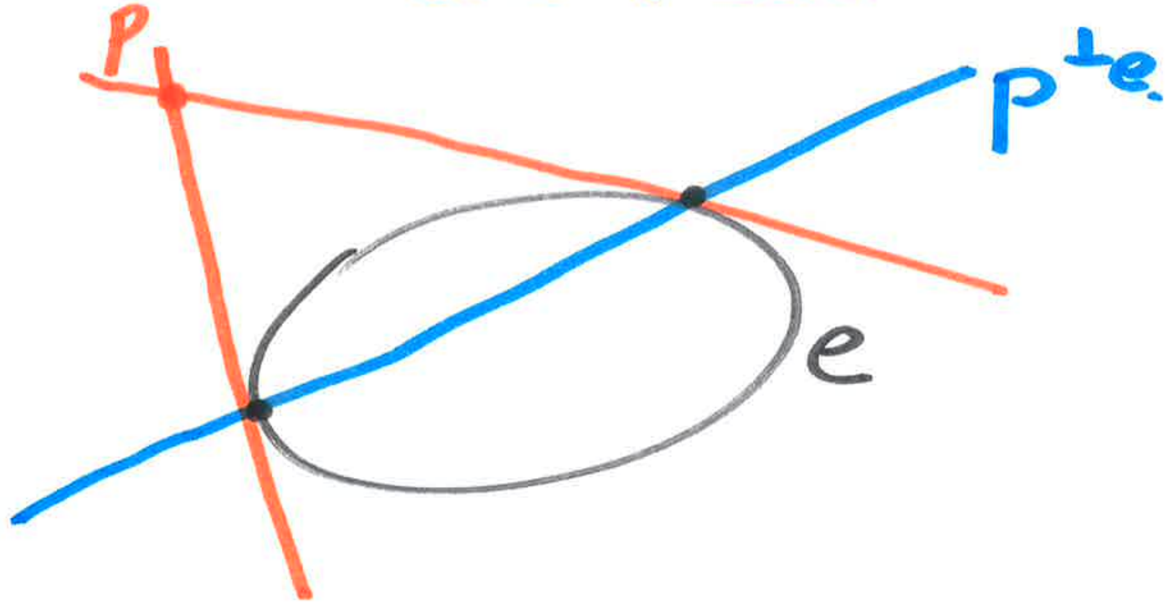
$\Rightarrow r^{\perp e} = R$ è il polo di r e quindi la retta $S^{\perp e} = s$ passa per R

$\square$

Teorema: Sia $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P.

Se $P \notin \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ è la retta che congiunge i 2 punti di tangenza delle rette tg. a $\mathcal{C}$ per P.



DIM: 1) Si parte dall'eq.

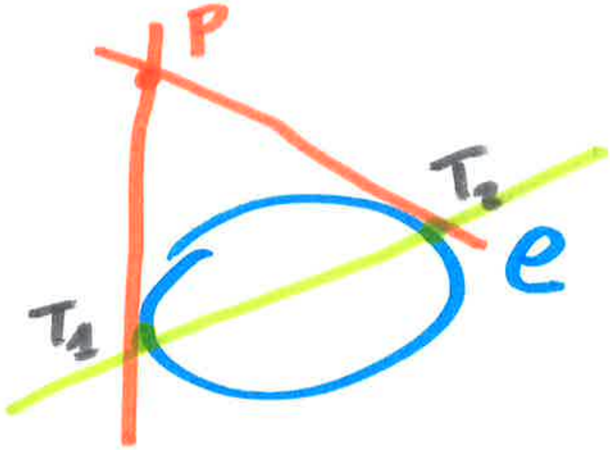
$$\lambda^2({}^tX'AX') + 2\lambda\mu({}^tX'AX'') + \mu^2({}^tX''AX'') = 0$$

e si cerca il luogo delle tg. per X' dato.

→ BISOGNA IMPORRE $({}^tX'AX'')^2 - ({}^tX'AX')({}^tX''AX'') = 0$

e si trovano gli X'' che vanno bene dato X' e si verifica che devono appartenere a ${}^tX'AX''=0$ e dunque alla polare di X'. □

DM (preferibile).



Sia P un punto e siano t_1, t_2 le tangenti per P a $\mathcal{e}$ e T_1, T_2 i rispettivi punti di tangenza

$$\Rightarrow P = t_1 \cap t_2 = T_1^{\perp_e} \cap T_2^{\perp_e} \Rightarrow$$

per il principio di reciprocità:

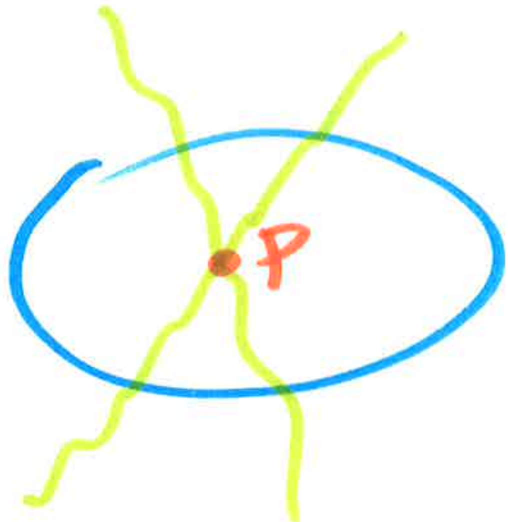
$$P \in T_1^{\perp_e} \cap T_2^{\perp_e} \iff T_1^{\perp_e \perp_e}, T_2^{\perp_e \perp_e} \in P^{\perp_e} = p$$

ma $T_1^{\perp_e \perp_e} = T_1$, $T_2^{\perp_e \perp_e} = T_2$ quindi

$T_1, T_2 \in p$ polare di P. Per 2 pti distinti $\exists!$ retta $\Rightarrow$ p è proprio la rt

$T_1 T_2$. $\square$

Interpretazione geometrica della rt. polare.



N.B: per ogni punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ esistono 2 rette tangenti a $\mathcal{C}$:

→ coincidenti se $P \in \mathcal{C}$

→ reali e distinte se P è esterno a $\mathcal{C}$

→ imm. e coniugate se P è interno a $\mathcal{C}$.

$\square$

Quando

$$x^2+y^2-4(k-1)xy-2y+1=0$$

è generale?

$$\downarrow$$

$$x_1^2+x_2^2-4(k-1)x_1x_2$$
$$-2x_2x_3+1x_3^2=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2k+2 & 0 \\ -2k+2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2k+2 & 0 \\ -2k+2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$1-1-(-2k+2)^2=$$

$$=(2-2k)^2$$

$k\neq 1$ la conica è generale.

$k=1$ la conica è riducibile.

in che cosa si riduce?

$$x_1^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2=0$$

$$X_1^2 + (X_2 - X_3)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + i(X_2 - X_3) = 0 \\ X_1 - i(X_2 - X_3) = 0 \end{array}\right] \text{2 rette imm. conj.}$$

il punto reale di intersezione

è $x_1 = 0$; $x_2 = x_3$ $[(0\ 1\ 1)]$
omogenee

oppure in coord. affini $(0\ 1)$.

(direttamente con formula
$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice conica.

1) possiamo trovare i punti doppi risolvendo $AX = \underline{0}$

$\rightarrow P = [(0, 1\ 1)]$ è doppio.

2) Sappiamo che $\mathcal{C}$ si spezza in 2 rette passanti per $[(0\ 1\ 1)]$

Troviamo un altro punto di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C} \cap [x_3 = 0]$ ha

eq. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$P_1 = [(1, i, 0)]$ $P_2 = [(1, -i, 0)]$

$\in \mathcal{C}$.

in particolare $\mathcal{C} = PP_1 \cup PP_2$

(

$$\left(\frac{x-1}{0-1}-\frac{y-i}{1-i}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{0-1}-\frac{y+i}{1+i}\right)=0$$

PP_1 $\qquad\qquad$ PP_2.

<u>N.B</u>: le rette devono essere 2 (anche se coincidenti).

→ CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE IN $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ è COMPLETA.

→ vogliamo studiare ora le coniche in $AG(2, \mathbb{R})$.

o in $EG(2, \mathbb{R})$.

↓

classifichiamo le coniche rispetto l'unica retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ che non è in $AG(2, \mathbb{R})$.

↓

classificare le coniche in termini affini corrisponde a distinguerle in termini dei loro punti impropri.

Def:

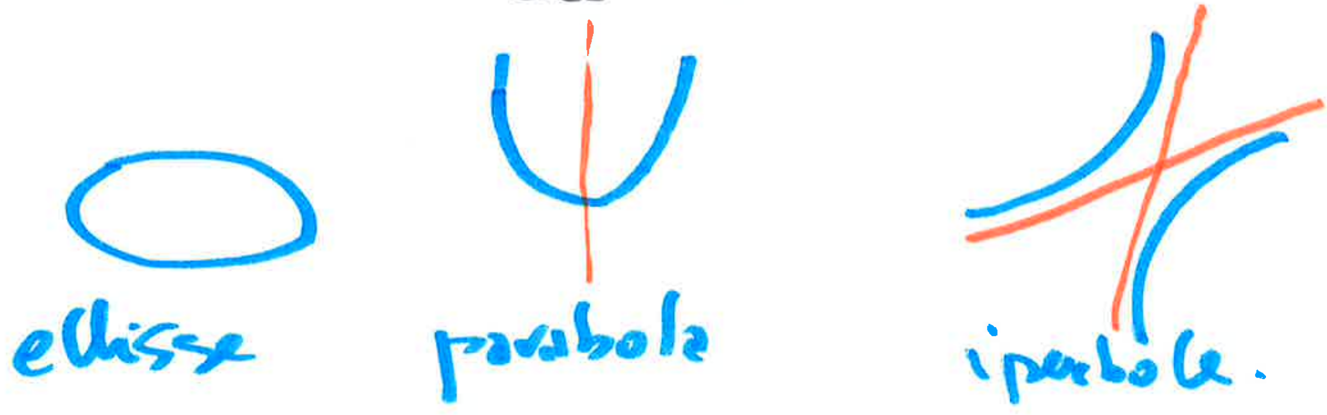
Una conica generale $\mathcal{C}$ è detta

1) Ellisse se $\mathcal{C} \cap [x_3=0]$ sono 2 punti immaginari e coniugati

2) Parabola se $\mathcal{C} \cap [x_3=0]$ è un punto reale contato 2 volte.

3) Iperbole se $\mathcal{C} \cap [x_3=0]$ sono 2 punti reali e distinti.

1') Una circonferenza è una ellisse passante per i punti impropri $J_\infty = [(1,i,0)]$
$\bar{J}_\infty = [(1,-i,0)]$.



Sia A la matrice di una conica $\mathcal{C}$.

$$\tilde{V}({}^tXAX) \cap [x_3=0].$$

cerchiamo le intersezioni di

$$\begin{cases} (x_1\ x_2\ 0)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

~~Ovviamente~~ il sistema risulta equivalente a

$$\begin{cases} (x_1\ x_2)A^*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

ove $A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

vogliamo vedere quante soluzioni $(x_1\ x_2)A^*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$ ha.

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0$$

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A^*).$$

$\det(A^*) > 0 \iff \frac{\Delta}{4} < 0 \iff \mathcal{C}$ ellisse.

$\det(A^*) = 0 \iff \frac{\Delta}{4} = 0 \iff \mathcal{C}$ parabola.

$\det(A^*) < 0 \iff \frac{\Delta}{4} > 0 \iff \mathcal{C}$ iperbole.

[quello che interessa è la segnatura del prod. scalare definito da A^* cioè i segni degli autovalori.

→ se i segni sono $(+,+)$ o $(-,-)$ ⇒ prod. scalare definito → non ci sono punti reali autoconiugati. ⇒ ellisse. $(\det > 0)$.

→ se i segni sono $(+,-)$ ⇒ ∃ 2 punti autoconiugati ⇒ iperbole

→ se la segnatura è $(+,0)$ o $(-,0)$ ⇒ ∃! punto doppio ⇒ parabola]