Teorema dell'ordine.

Sia $F(x_1\, x_2\, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$ ed r una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Allora $r \cap \tilde{V}(F)$ contiene esattamente* n punti oppure $r \subseteq \tilde{V}(F)$.

→ CONSEGUENZA: $\boxed{\text{se } |r \cap \tilde{V}(F)| > n \Rightarrow r \subseteq \tilde{V}(F)}$

*esattamente contati con la debita molteplicità.

↓

si ottengono i punti risolvendo una eq. di grado n a coeff in $\mathbb{C}$.

↓

ha sempre n soluzioni ma ci possono essere soluzioni che compaiono più volte.

$(x-1)^2=0$ 2 soluzioni
$x=1$ "contata 2 volte"

DATO $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ si dice che ξ è soluzione k-upla di $h(x)=0 \iff (x-\xi)^k \mid h(x)$ e

↖ divide

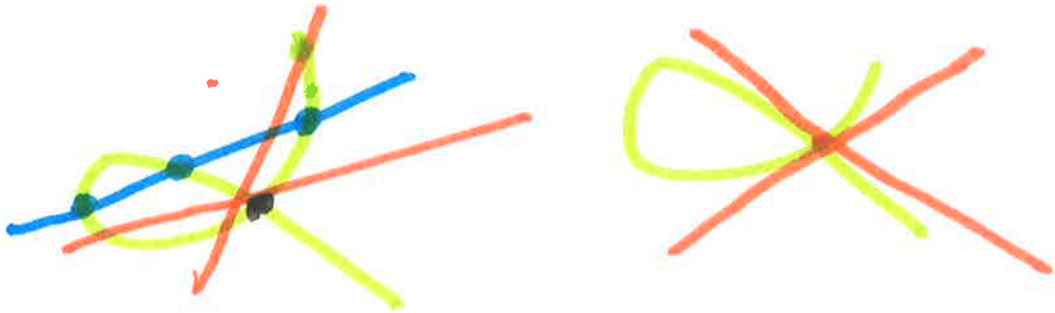
$(x-\xi)^{k+1} \nmid h(x)$

↖ non divide.

<u>Def</u>: Sia $\tilde{V}(F)$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Si dice che $P \in \tilde{V}(F)$ è un <u>punto k-uplo</u> per $\tilde{V}(F)$ se ogni retta per P interseca $\tilde{V}(F)$ in P almeno k volte

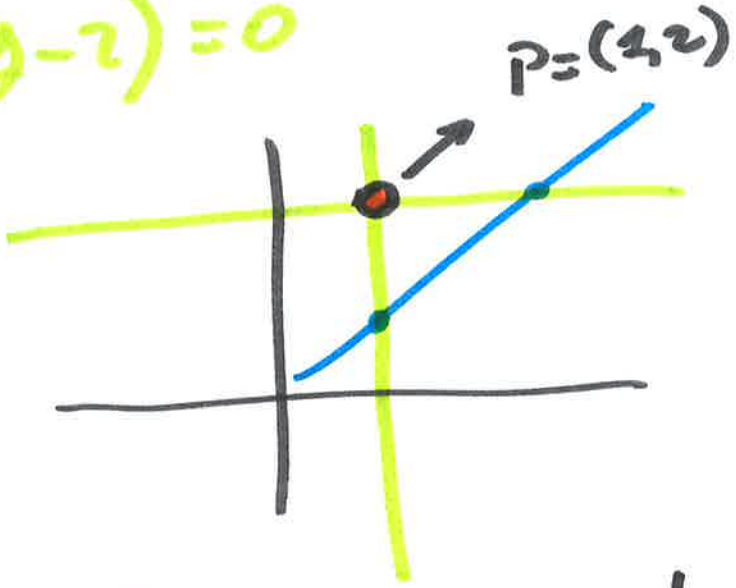
[e ci sono k rette per P che intersecano $\tilde{V}(F)$ in P k+1 volte.]

In pratica: ogni volta che sostituite nell'eq. della curva quella di una retta per P il valore che vi dà l'intersezione in P è radice k-esima.



la curva "passa più volte" per il punto multiplo.

$(x-1)(y-2)=0$



il punto P deve essere doppio (almeno).

le rette che intersecano ">2 volte" in P sono $x=1$ e $y=2$

Punti reali e immaginari:

$$x^2+y^2=0 \qquad x_1^2+x_2^2=0$$

$$\tilde{V}(x_1^2+x_2^2)$$

l'unico punto reale della curva è il punto $O=(0\ 0)$ ovvero il punto di coord. omogenee $[(0\,0\,1)]$

↓

questo punto è doppio in quanto abbiamo una curva del II ordine e ogni retta $y=mx$ interseca la curva solo in $O=(0\ 0)$.

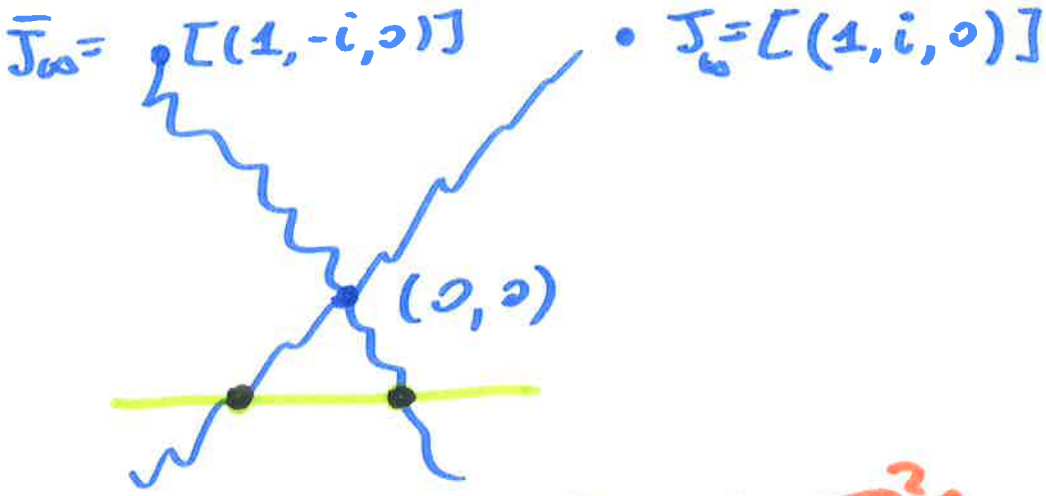
Dove sono gli altri punti?

$$(x^2+y^2)=(x+iy)(x-iy)$$

in $\mathbb{C}[x,y]$.

In particolare l'eq. si fattorizza e la curva è unione di 2 rette.

immaginarie e coniugate passanti per il punto <u>reale</u> $(0,0)$



In particolare $\forall$ retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ non per $[(0\,0\,1)]$ interseca queste 2 rette in 2 punti distinti che saranno immaginari e coniugati $\Rightarrow$

TUTTO TORNA.

Sia $F(x_1\, x_2\, x_3)$ un polinomio omogeneo in $x_1\, x_2\, x_3$.

Osserviamo che i punti reali della curva $\tilde{V}(F(x_1\, x_2\, x_3))$ sono tutti e soli i punti $P \in \tilde{V}(F)$ con $P = \bar{P}$

in particolare

P é reale per $\tilde{V}(F) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P \in \tilde{V}(F) \cap \overline{\tilde{V}(F)} = \qquad (*)$$
$$= \tilde{V}(F) \cap \tilde{V}(\bar{F}).$$

se la curva é reale cioé $\tilde{V}(F) = \tilde{V}(\bar{F})$ la condizione $(*)$ non ci dice nulla di nuovo.

se $\tilde{V}(F) \neq \tilde{V}(\bar{F}) \Rightarrow$ le intersezioni fra $\tilde{V}(F)$ e $\tilde{V}(\bar{F})$ sono gli unici possibili punti reali (bisogna peró verificare che lo siano).

1) In $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ ogni retta ha almeno un punto reale.

2) Se una retta ha 2 punti reali dist. $\Rightarrow$ essa è reale.

3) per ogni punto immaginario passa una e una sola retta reale.

1) Sia r una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Se $r = \bar{r} \Rightarrow r$ è reale ed ha ∞ punti reali.

Se $r \neq \bar{r} \Rightarrow r \cap \bar{r} = \{P\}$.

ma $\bar{P} \in \overline{r \cap \bar{r}} = \bar{r} \cap r = \{P\}$.

$\Rightarrow P = \bar{P}$ ed r ha esattamente un punto reale.

2) OVVIO: scriviamo l'equazione.

$r = PQ$ con P, Q reali

$\Rightarrow \bar{r} = \bar{P}\bar{Q} = PQ \Rightarrow r = \bar{r}$

3) Sia P un punto immaginario $\Rightarrow P \neq \bar{P}$ ma $\forall$ retta reale deve passare sia per P che per $\bar{P}$ se contiene P.
poniamo $r_0 = P\bar{P}$ e osserviamo che $\bar{r} = \overline{P\bar{P}} = \bar{P}P = r$ quindi r_0 é reale. $\square$

Similmente in $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$:

1) Ogni piano contiene almeno una retta reale.
~~Per una retta passa uno e un solo~~ ~~passa uno e un solo~~

2) Le rette immaginarie si ripartiscono in 2 famiglie:
   I) rette imm. di I specie tali che esse sono complanari alle loro coniugate
   II) rette imm. di II specie tali che esse sono sghembe alle

loro coniugate.

3) per ogni retta immaginaria di I specie passa uno e un solo piano reale; per ogni retta immaginaria di II specie non passano piani reali.

4) Le rette imm. di I specie hanno 1 punto reale; quelle di II specie nessuno.

1) Sia π un piano di $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$

Se π reale $\Rightarrow$ π contiene ∞ rette reali.

Se π immaginario $\Rightarrow$ $\pi \neq \overline{\pi}$

$$r_0 = \pi \cap \overline{\pi} = \overline{\pi} \cap \pi = r_0$$

è una retta reale contenuta in π.

2) esistono rette immaginarie che sono sghembe rispetto le coniugate.

$$\pi \begin{cases} x + iy = i \\ x + iz = 1 - i \end{cases}$$

$$\bar{\pi} \begin{cases} x - iy = -i \\ x - iz = 1 + i \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & i \\ 1 & 0 & i & 1-i \\ 1 & -i & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 1+i \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & i \\ 0 & -i & i & 1-2i \\ 0 & -2i & 0 & -2i \\ 0 & -i & -i & 1 \end{bmatrix} = \cancel{\det}$$

$$= -i \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & i & 1-2i \\ 2 & 0 & -2i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -i \det\begin{pmatrix} 1 & i & 1-2i \\ 0 & -2i & -1 \\ 0 & -2i & 2i \end{pmatrix} =$$

$$= -i \cdot (-2i) \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \neq 0$$

3) Un piano reale π che contiene r deve contenere anche $\bar{r}$. Se r e $\bar{r}$ sono sghembe $\Rightarrow \nexists$ un piano reale che le contenga entrambe.

Se r ed $\bar{r}$ sono distinte e complanari $\Rightarrow$ in $r \cup \bar{r}$ ci sono almeno 3 punti non allineati

$\Rightarrow \exists!$ piano π con

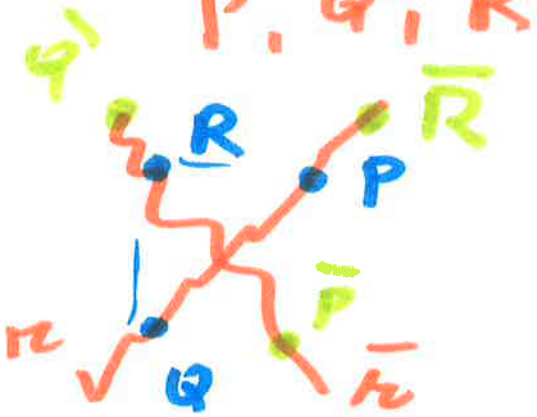
$$r \cup \bar{r} \subseteq \pi.$$

Siano (P, Q, R) i tre punti di prima.

$\Rightarrow \pi = \langle P, Q, R \rangle$

piano generato da

P, Q, R



ma allora $\bar{\pi} = \langle \bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \rangle$ e

$\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ sono ancora 3

punti di $r \cup \bar{r}$ $\Rightarrow$ $\bar{\pi} = \pi$

e π è un piano reale.

4) I punti reali di una retta

r immaginaria sono quelli

di $r \cap \bar{r}$ $\rightarrow$ se r di I specie

$\exists!$

se r di II specie

$r \cap \bar{r} = \phi$.

$\square$

Equazioni della retta reale per $P=(1, i, 0)$ in $A_3(\mathbb{C})$ cioè in $AG(3, \mathbb{C})$.

r deve passare per P e $\bar{P}$ con $\bar{P} \neq P$

$P = (1\ i\ 0)$

$\bar{P} = (1\ -i\ 0)$

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-i}{-i-i} = \frac{z-0}{0-0}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Rette reale per

$$P = (1+i, 2-i, i)$$

$$\overline{P} = (1-i, 2+i, -i)$$

$$r: \frac{x-(1+i)}{(1-i)-(1+i)} = \frac{y-(2-i)}{(2+i)-(2-i)} = \frac{z-i}{-i-i}$$

$$\frac{x-1-i}{-2i} = \frac{y-2+i}{2i} = \frac{z-i}{-2i}$$

$$x-1-i = -(y-2+i) = z-i$$

$$\begin{cases} x-1-i+y-2+i=0 \\ x-1-i = z-i \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

Sia $\pi: 3x+2iy+z-1=0$

un piano di $AG(3,\mathbb{C})$.

Trovare un'equazione reale della retta reale di π.

$$r \begin{cases} 3x+2iy+z-1=0 & \pi \cap \bar{\pi} \\ 3x-2iy+z-1=0 \end{cases}$$

$\equiv$ equivalente a

$$\begin{cases} 6x+2z-2=0 \\ 4iy=0 \end{cases}$$

equiv.

$$\begin{cases} 6x+2z-2=0 \\ y=0 \end{cases}$$ eq. reale

CURVE ALGEBRICHE IN $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

I ordine → eq. di I grado
→ rette.

II ordine → eq. di II grado.

Def: Si dice conica una curva algebrica reale piana del II ordine. (in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$)

Sia $F(x_1\, x_2\, x_3)$ un polinomio omogeneo di II grado in $x_1\, x_2\, x_3$. a coeff. in $\mathbb{R}$.
Una conica è data dal luogo dei punti di $\tilde{V}(F)$.

1) curva algebrica → i punti sono descritti da coord. omogenee dalle classi di autosoluzioni di una eq. omogenea $F(x_1\, x_2\, x_3)$ con F polinomio.

2) Reale: F è un polinomio a coeff. in $\mathbb{R}$.

[$\tilde{V}(F) = \tilde{V}(\bar{F})$ e quindi esiste una eq. per la curva a coeff. in $\mathbb{R}$]

3) del II ordine: $\deg F = 2$.

4) piana: lavoriamo in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ (ovvero le indeterminate in F sono $2+1=3$).

—

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = \left[\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \end{array}\right]$$

Generico polinomio omogeneo in $x_1\ x_2\ x_3$ di II grado.

$(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{33}) \neq \underline{0}$

6 coeff.

vettori $(a_{11} \dots a_{33})$ proporzionali

danno polinomi proporzionali

e le soluzioni

$$\tilde{V}(F) = \tilde{V}(aF) \quad a \neq 0$$

quindi il numero totale di coniche possibili è ∞^5

6 coeff. a meno di proporzionalità

Geometricamente: per 5 punti "in posizione generale" passa una ed una sola conica.

6 coeff. a meno di prop.

per determinarli servono 5 equaz. lineari indipendenti $\Rightarrow$ servono "5 punti in posizione generale" ovvero che det. eq. indipendenti.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + \quad (*)$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Scrivo
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(*) si riscrive come $\boxed{{}^TXAX = 0}$

ove A é della matrice della conica ed $A = {}^TA$ (é simmetrica) e reale.

In particolare: data una conica $\mathcal{C} = \tilde{V}({}^TXAX)$

si puó sempre definire un prodotto scalare $\beta(X,Y) := {}^TXAY$

~~definito positivo~~

Si vede che le proprietà del prodotto scalare β così definito corrispondono a proprietà geometriche della conica.

Sia $P, R \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Si dice che P è coniugato rispetto la conica $\mathcal{C}$ al punto R se $\beta(P,R)=0$ cioè

$$ {}^TPAR = 0 $$

ovvero $P \in R^{\perp_\beta}$

ove per $\perp_\beta$ o $\perp_{\mathcal{C}}$ intendo "ortogonale rispetto il prod. scalare indotto dalla conica".

OSS: $P \in P^{\perp_\beta} \iff P \in \mathcal{C}$

Un punto è detto autoconiugato se $\beta(P,P)=0$ cioè $P \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ ma questo succede $\Leftrightarrow$

${}^tPAP=0$ ovvero $\Leftrightarrow P \in \mathcal{C}$.

punti multipli di una conica.

1) Sia $\mathcal{C}$ una conica $\Rightarrow$

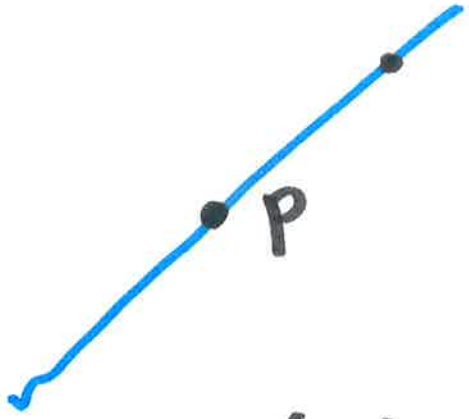
a) $\mathcal{C}$ non ha punti tripli

b) $\mathcal{C}$ ha almeno un punto doppio $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ è riducibile nell'unione di 2 rette.

a) Se $\exists\, P \in \mathcal{C}$ punto triplo $\Rightarrow$ $\Rightarrow \forall$ retta per P intersecherebbe $\mathcal{C}$ almeno 3 volte $\Rightarrow$ essa sarebbe contenuta in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow \mathcal{C} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ assurdo. perché dovrebbe avere eq. $0=0$. ↯

b) Supponiamo dapprima $P \in \mathcal{C}$ punto doppio.

$\Rightarrow$ $\forall$ retta per P interseca $\mathcal{C}$ in P almeno 2 volte



Una curva algebrica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ non può ridursi ad un solo punto $\Rightarrow$ sia X un altro punto di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ la retta PX interseca $\mathcal{C}$ almeno $3 > 2$ volte (2 in P ed 1 in X) $\Rightarrow$ PX è contenuta in $\mathcal{C}$ per il teorema dell'ordine $\Rightarrow$ l'equazione di PX divide l'equazione di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = G(x_1\, x_2\, x_3) \cdot H(x_1\, x_2\, x_3)$$

$\deg = 2$ $\qquad$ eq. di PX, $\deg = 1$ $\qquad$ $\deg = 1$

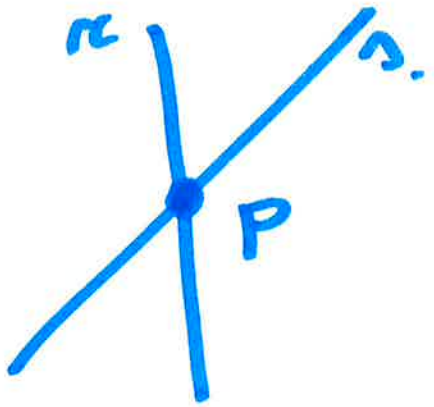
ne segue

$$\mathcal{C} = \tilde{V}(F) = \tilde{V}(G \cdot H) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$$

cioè che $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette.

3 possibili casi

1) $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette reali e distinte



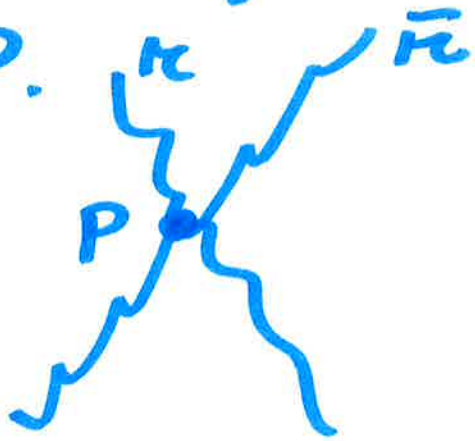
2) $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette immaginarie, ma l'eq. di $\mathcal{C}$

è reale ⇒ deve essere

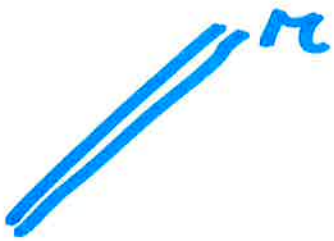
$$G = \overline{H}$$

e le 2 rette devono essere immaginarie e coniugate.

l'unico punto reale di $\mathcal{C}$ è P.



3) $G = H$ e le due rette sono reali e coincidenti ⇒ ogni punto di $\mathcal{C}$ è un punto doppio e i punti (reali) di $\mathcal{C}$ giacciono tutti su di una retta contata 2 volte.



viceversa:

supponiamo

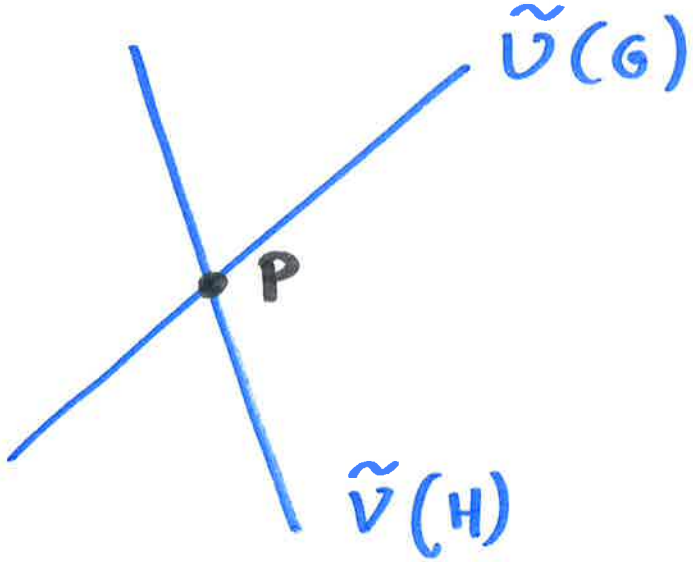
$$\mathcal{C} = \tilde{V}(G \cdot H)$$

cioè che la conica $\mathcal{C}$ si riduca nell'unione di 2 rette.

<u>CLAIM</u>: ogni punto di

$$\tilde{V}(G) \cap \tilde{V}(H)$$

è doppio per $\mathcal{C}$.



$P \in \tilde{V}(G) \cap \tilde{V}(H)$.

Sia adesso Q un punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

se la retta PQ interseca la conica

in un punto $\neq P \Rightarrow$ sia R tale punto.

Noi abbiamo $R \in \tilde{V}(G)$ oppure $R \in \tilde{V}(H)$ perché la conica è unione di quelle 2 rette, ma allora $Q \in \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$.

Ne segue che se $Q \notin \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$ tutte le intersezioni della retta PQ con $\mathcal{C}$ devono essere in $P \Rightarrow P$ è un punto doppio perché PQ deve intersecare 2 volte.

$\square$