Ampliamento proiettivo.

$$AG(n, \mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$$

geometria affine.

geometria proiettiva
= geometria affine
+ punti impropri
che sono le dir.
delle rette.

Idea: trattare le direzioni delle rette come se fossero dei punti.

coordinate affini
$(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ $\to$ coordinate omogenee
$[(x_1 \dots x_n\, x_{n+1})]$
classi di prop. a meno di un coeff. non nullo.

$$(x_1 \text{---} x_n) \longmapsto [(x_1 \text{---} x_n\, 1)] \in \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\mathbb{K} \setminus \{0\}}.$$

sottospazi affini di dimensione n $\mapsto$ sottospazi proiettivi di dimensione n che si costruiscono come $\mathbb{P}(W)$ ove W sp. vett. di dim. $n+1$.

retta in $AG(2, \mathbb{K})$ $\hookrightarrow$ retta in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$

$ax+by+c=0$

$ax_1+bx_2+cx_3=0$

$r_0 = \mathbb{P}(W)$
ove W ha $\dim = 2$

<u>N.B</u> $\mathbb{P}(X) = \{ P \in \mathbb{P}^n\mathbb{K}$ tali che le coordinate omogenee di P appartengono ad $X \}$.

$X \leq \mathbb{K}^{n+1}$

In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette si intersecano sempre in un punto.

r, s corr. a due sottospazi $X, Y \leq \mathbb{K}^3$ con $\dim X = \dim Y = 2$ $\Rightarrow$ per grassmann $\dim(X \cap Y) \geq 1$.

In $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ due piani si intersecano sempre in almeno una retta.

<u>DIM</u>: $\pi = \mathbb{P}(X)$
$\sigma = \mathbb{P}(Y)$ con $\dim X = \dim Y = 3$

e $X, Y \leq \mathbb{K}^4$

$\Rightarrow \dim(X \cap Y) \geq 2$ per la formula di Grassmann $\Rightarrow \pi \cap \sigma$ è sempre almeno una retta perché

$\pi \cap \sigma = \mathbb{P}(X) \cap \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X \cap Y)$

$\square$.

sp. affine $\rightarrow$ sp. proiettivo $\rightarrow$ sp. vettoriale
$\leftarrow$ $\leftarrow$

<u>N.B</u>: Se $\pi \cap \sigma$ é una retta impropria

$\Rightarrow \pi$ e σ hanno la stessa giacitura

$\Rightarrow \pi // \sigma$

<u>Def</u>: In $AG(2, \mathbb{K})$ si dice curva algebrica l'insieme dei punti

$$V(f) := \{(x,y) \in AG(2,\mathbb{K}) : f(x,y) = 0\}$$

ove $f(x,y)$ è un polinomio non costante di grado $n \geq 1$ a coeff. in $\mathbb{K}$.

N.B: la definizione presuppone che sia fissato un riferimento affine. Bisognerebbe mostrare che "non cambia nulla" al mutare del riferimento $\perp$

$\downarrow$

al mutare dei riferimenti le equazioni <u>cambiano</u> ma le prop. geometriche (intersezioni, ordine, etc.) non mutano.

Dato $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ polinomio in x e y a coeff. in $\mathbb{K}$ non costante chiamiamo polinomio omogeneo associato a $f(x,y)$ il polinomio

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

N.B. 1) $F(x_1\, x_2\, x_3) \in \mathbb{K}[x_1\, x_2\, x_3]$

cioè F è un polinomio in $x_1\, x_2\, x_3$.

2) F è un polinomio omogeneo in $x_1\, x_2\, x_3$ cioè ogni monomio che compare in F ha il medesimo grado.

Es: $f(x,y) = 3x^4 - x^2 + 2xy + y^3 - 5$

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = x_3^4\left(3\frac{x_1^4}{x_3^4} - \frac{x_2^2}{x_3^2} + \frac{2x_1x_2}{x_3^2} + \frac{x_2^3}{x_3^3} - 5\right)$$

$$= 3x_1^4 - x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3^2 + x_2^3x_3 - 5x_3^4.$$

3) In particolare se $F(x_1\, x_2\, x_3)$ è un polinomio omogeneo e

$(x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{k}^3$ è tale che

$$F(x_1'\ x_2'\ x_3') = 0 \Rightarrow$$

$\alpha(x_2'\ x_2'\ x_3')$ è tale che

$$F(\alpha x_1'\ \alpha x_2'\ \alpha x_3') = \alpha^{\deg F} F(x_1'\ x_2'\ x_3') = 0$$

Quindi possiamo vedere

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

come una equazione in $\mathbb{P}^2\mathbb{k}$

e poniamo

$$\tilde{V}(F) := \{[(x_1\ x_2\ x_3)] \mid F(x_1\ x_2\ x_3) = 0\}$$

<u>Teorema</u>: Sia $f(x,y) \in \mathbb{k}[x,y]$ non costante e $F(x_1\ x_2\ x_3)$ il suo polinomio omogeneo associato. Allora i punti propri di $\tilde{V}(F)$ sono i punti di $V(f)$ visti nell'ampliamento proiettivo.

EQUAZIONE $f(x,y)=0$ in $AG(2,\mathbb{K})$ $\longrightarrow$ EQUAZIONE $F(x_1, x_2, x_3)=0$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$

punti di $V(f)$ $\longleftrightarrow$ punti propri di $\tilde{V}(F)$.

Supponiamo $(x', y') \in V(f)$

$$\Rightarrow f(x', y') = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot f\left(\frac{x'}{1}, \frac{y'}{1}\right) = F(x', y', 1) = 0$$

$$\Rightarrow [(x', y', 1)] \in \tilde{V}(F).$$

Viceversa se ~~$F(x_1', x_2', x_3)$~~

$[(x_1' \, x_2' \, x_3')] \in \tilde{V}(F)$ con

$$x_3' \neq 0 \Rightarrow [(x_1' \, x_2' \, x_3')] =$$

$$= \left[\left(\frac{x_1'}{x_3'} \; \frac{x_2'}{x_3'} \; 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{x_1'}{x_3'}, \frac{x_2'}{x_3'}, 1\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_1'}{x_3'} \; \frac{x_2'}{x_3'}\right) = 0$$

$\square$

passare da $V(f)$ a $\tilde{V}(F)$ vuol dire aggiungere dei punti impropri alla curva $V(f)$.

Chiamiamo i punti di $\tilde{V}(F) \setminus V(f)$ punti impropri (o all'infinito) di $V(f)$.

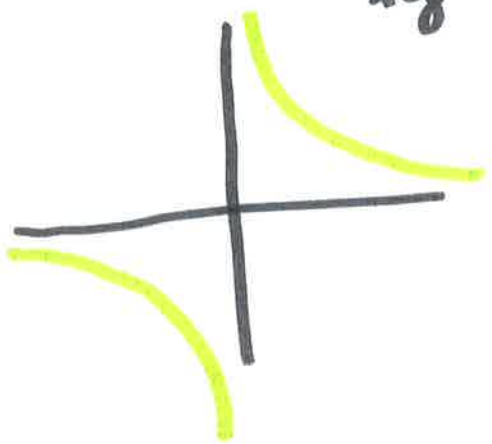
N.B: I punti impropri sono le direzioni delle rette.

$\rightarrow r: ax + by + c = 0$ allora il punto improprio di r corrisponde esattamente alla direzione di r.

in $A G(2, \mathbb{R})$ la curva di eq.

$$xy = 1 \longrightarrow x_1 x_2 = x_3^2$$

$$V(xy-1) \qquad \tilde{V}(x_1 x_2 - x_3^2)$$



$xy = 1$

$$\begin{cases} x_1 x_2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_3 = 0 \quad x_2 \neq 0$

$[(0\ 1\ 0)] = y_\infty$

$x_2 = x_3 = 0 \quad x_1 \neq 0$

$[(1\ 0\ 0)] = x_\infty$

N.B. Noi non abbiamo calcolato dei limiti!!

Similmente per altre curve algebriche.

Studiare le curve algebriche

Equazione $\longmapsto$ $V(f)$

$f(x,y)=0$ insieme di punti.

si può tornare indietro?

DATO $X \subseteq AG(2,\mathbb{K})$ o $\tilde{X} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$

SI PUÓ TROVARE UNA CURVA ALG.

CIOÉ UNA EQ. $f(x,y)=0$ CON

$f \in \mathbb{K}[x,y]$ tale che $V(f)=X$?

No, NON IN GENERALE.

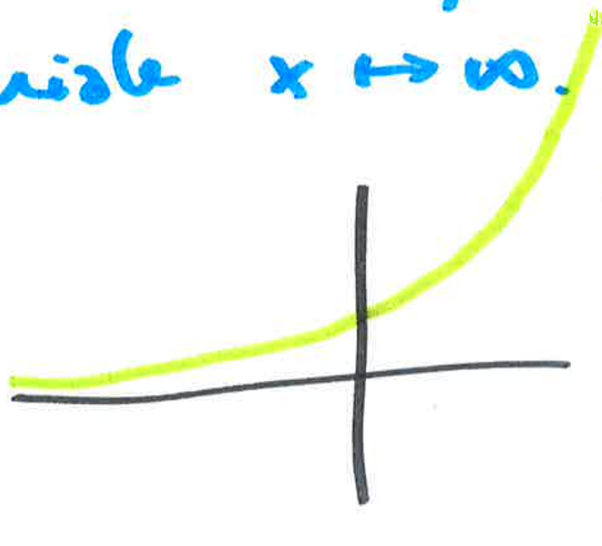
ES. $\quad X \subseteq AG(2,\mathbb{R})$

$$X = \{(x,y) \mid y = e^x\}.$$

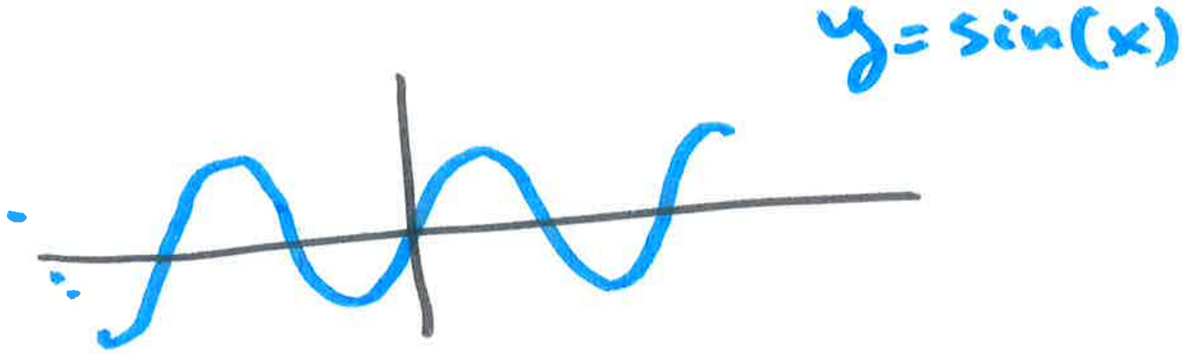
Non esiste nessun polinomio

$f(x)$ tale che $f(x) = e^x$

La funzione e^x cresce più rapidamente di qualsiasi funzione polinomiale $x \mapsto \infty$.



$y=e^x$
NON È UNA CURVA ALG.



la funzione $y = \sin(x)$ ha valore 0 per infiniti valori di x (cioè $x = k\pi$).
$k \in \mathbb{Z}$

ma noi abbiamo già visto che una curva algebrica di grado n ha al più n intersezioni con una retta (ad es. l'asse delle x).

$\Rightarrow$ $y = \sin(x)$ non è una curva algebrica.

Si dice che $X \subseteq AG(2, \mathbb{K})$ é un **insieme algebrico** se $\exists\ f_1(x,y) \dots f_t(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ polinomi tali che $X = V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_t)$.

Similmente se $\tilde{X} \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$ ed in quel caso si vogliono $F_1(x_1\ x_2\ x_3) \dots F_t(x_1\ x_2\ x_3)$ polinomi omogenei.

Insieme algebrico in $AG(2, \mathbb{K})$ = intersezione di curve algebriche.

<u>OSS</u>: 1) l'intersezione di 2 insiemi algebrici é un insieme algebrico

2) l'unione di 2 curve algebriche é un insieme algebrico.

$$V(f_1) \cup V(f_2) = V(f_1 \cdot f_2).$$

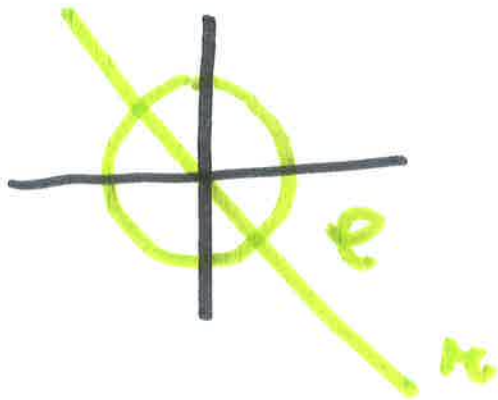
in particolare é anche esso una curva algebrica.

unioni finite

ES.

$r: x+y=0 \qquad r = V(x+y)$

$\mathcal{C}: x^2+y^2=1 \qquad \mathcal{C} = V(x^2+y^2-1)$



$$\mathcal{C} \cup r = V\big((x+y)(x^2+y^2-1)\big).$$

Sia X un insieme tale che $X = V(f)$ con $f \in \mathbb{K}[x,y]$ polinomio non costante.

Dato X è possibile trovare f in modo "unico"?

ATTENZIONE: $f(x,y)=0 \iff [f(x,y)]^k = 0$ con $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Sia X l'insieme dei punti che soddisfano $(x+y)=0$

$\Rightarrow$ essi soddisfano anche $(x+y)^2=0$

e la seconda eq. ci dà come

$$V(x^2+2xy+y^2) = V(x+y).$$

$x+y=0$

$\{(x,y) \mid x+y=0\}$.

$\alpha(x+y)^k=0$
$\alpha \neq 0$.

In generale se $f(x,y)=0$ è una equazione che descrive un insieme X di punti $\Rightarrow$

$\boxed{\alpha(f(x,y))^k=0}$ con $\alpha\neq 0$ e $k\in\mathbb{N}$, $k>0$

descrive lo stesso insieme.

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ può accadere questo.

$$r_0 := \{(x,y) \mid x+y=0\}.$$

$$f(x,y) = (x+y)(x^2+y^2+1)$$

$$V(f) = \{(x,y) \mid x+y=0\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=-1\} =$$

$$= r_0.$$

In generale è difficile trovare $\forall$ le eq. che corrispondono ai punti di una data curva algebrica se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

<u>Teorema</u>: Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso e $X=V(f)$ è l'insieme dei punti di una curva algebrica di eq. $f(x,y)=0 \Rightarrow \exists$ un polinomio

$g(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ tale che

$X = \mathcal{V}(g)$ ed

$f(x,y) = \alpha\, g(x,y)^k$

con $\alpha \neq 0$ $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso ad ogni insieme di punti di una curva algebrica è associata una ~~equazione algeb~~ unica equazione di grado minimo (a meno di coeff. di proporzionalità) ed ogni equazione di quell'insieme è (a meno di coeff. α di prop.) una potenza di tale equazione.

↓

si può parlare di equazione associata ai punti di una curva algebrica.

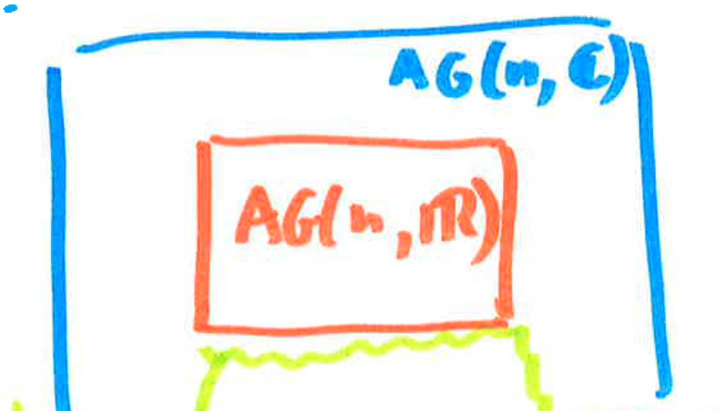
COMPLESSIFICAZIONE $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Abbiamo $AG(n,\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{P}^n\mathbb{R}$

vogliamo poter lavorare in

$$AG(n,\mathbb{C}) \qquad \mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

e studiare in questo ambiente la geometria (perché con $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ certe proprietà sono più facili da vedere) ma riconoscere le strutture da cui siamo partiti.



$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ come campo.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ abbiamo $(x,y) \in \mathbb{C}^2$

possiamo identificare i punti di $AG(n,\mathbb{R})$ con i punti di $AG(n,\mathbb{C})$ che hanno coordinate reali. (funziona).

cosa succede a $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ sono rappresentati da classi di proporzionalità a meno di $\alpha \neq 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ sono rapp. da classi di proporzionalità a meno di $\alpha \neq 0$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Vogliamo identificare i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ con i punti di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ che contengano una classe di prop. di un vettore di $\mathbb{R}^{n+1}$.

$[(x_1 \dots x_{n+1})]_{\mathbb{R}} \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$

$(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\downarrow$

$[(x_1 \dots x_{n+1})]_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$

<u>N.B.</u> $[(x_1 \dots x_{n+1})]_{\mathbb{R}} \neq [(x_1 \dots x_{n+1})]_{\mathbb{C}}$.

Identifichiamo un punto di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ rappresentato da classi di prop. di vettori di $\mathbb{R}^{n+1}$ con il punto di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ che è rapp. da classi di prop. su $\mathbb{C}$ che contengono gli suzidetti vettori di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Esempio.

$[(0\ 1\ 0)]_{\mathbb{R}} \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$

$\downarrow$

$[(0\ 1\ 0)]_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$

$(0\ i\ 0) \in [(0\,1\,0)]_{\mathbb{C}}$

ma $\notin [(0\,1\,0)]_{\mathbb{R}}$.

$$[(0\ 1\ 0)]_{\mathbb{C}} = [(0\ i\ 0)]_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$$

$$\uparrow$$

$[(0\ 1\ 0)]_{\mathbb{R}}$ ma $(0\ i\ 0)$ non rappresenta il punto in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

<u>pb</u>: come definire/riconoscere i punti <u>reali</u> (i.e che vengono da $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$) in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$?

$$[((1-i),(2-2i),(3-3i))] \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$$

è reale? $\quad \|$

$$[(1-i)(1\ 2\ 3)] = [(1\ 2\ 3)]$$

è reale.

In $AG(n,\mathbb{C})$ o in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

Sia $P \in AG(n,\mathbb{C})$ diciamo coniugato di $P=(x_1 \dots x_n)$ il punto $\overline{P}=(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n)$.

Sia $\tilde{P}=[(x_1 \dots x_n x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ diciamo $\overline{\tilde{P}}=[(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n \overline{x}_{n+1})]$

Es. $P=(2,i) \in AG(2,\mathbb{C})$

$\overline{P}=(2,-i)$

oss. In $AG(n,\mathbb{C})$ abbiamo

$P=\overline{P} \iff$ tutte le coordinate di P sono numeri reali.

$P=\overline{P} \iff P \in AG(n,\mathbb{R})$

$P=\overline{P} \iff P$ é reale.

$(x_1 \dots x_n)=(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n) \iff x_1=\overline{x}_1 \dots x_n=\overline{x}_n$

$\iff x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$.

OSS II: Se $P \in AG(n,\mathbb{C})$ e

$\tilde{P} \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è il corrispettivo

nell'ampliamento proiettivo

$$\Rightarrow \quad \tilde{\overline{P}} = \overline{\tilde{P}}$$ ~~cioè~~

infatti

$$\tilde{P} = [(x_1 \dots x_n \ 1)]$$

$$\overline{\tilde{P}} = [(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \ 1)] =$$

$$= \tilde{\overline{P}} = [(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \ 1)].$$

In particolare se P è reale

$$\Rightarrow \quad \overline{\tilde{P}} = \tilde{P}.$$

Viceversa: supponiamo

$$\overline{\tilde{P}} = \tilde{P} \quad \Rightarrow$$

$$[(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \ \bar{x}_{n+1})] = [(x_1 \dots x_n \ x_{n+1})]$$

cioè $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \ \bar{x}_{n+1}) \in \mathcal{L}((x_1 \dots x_n x_{n+1}))$

Se $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \bar{x}_{n+1}) \neq -(x_1 \dots x_n x_{n+1})$

$\Rightarrow (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \bar{x}_{n+1}) + (x_1 \dots x_n x_{n+1}) =$

$= (\bar{x}_1 + x_1 \dots \bar{x}_{n+1} + x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$

~~ed~~ e dunque

$[(x_1 \dots x_{n+1})] = [(\bar{x}_1 + x_1 \dots \bar{x}_{n+1} + x_{n+1})]$

ammette coordinate reali.

Se $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}) = -(x_1 \dots x_{n+1}) \Rightarrow$

$(x_1 \dots x_{n+1}) = i(y_1 \dots y_{n+1})$

con $(y_1 \dots y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\Rightarrow [(x_1 \dots x_{n+1})] = [(y_1 \dots y_{n+1})]$

e P ammette coordinate reali.

<u>Def</u> rivista: Un punto $P \in AG(n, \mathbb{C})$ o $\tilde{P} \in \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ è detto <u>reale</u> se coincide col proprio coniugato.

Es. $P = [(1-i, 2-2i, 3-3i)]$

è reale $\Leftrightarrow$ $P = \overline{P} = [(1+i\ \ 2+2i\ \ 3+3i)]$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rk}\begin{pmatrix} \boxed{1-i} & 2-2i & 3-3i \\ 1+i & 2+2i & 3+3i \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-i & 2-2i \\ 1+i & 2+2i \end{vmatrix} = 0 \ \& \ \begin{vmatrix} 1-i & 3-3i \\ 1+i & 3+3i \end{vmatrix} = 0$$

il che è vero.

Def: Si dice che una curva algebrica $V(f)$ di $AG(2,\mathbb{C})$ è reale se

$$V(f) = \overline{V(f)}$$

ove $\overline{V(f)} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid (x,y) \in V(f)\}$

N.B. Una curva algebrica reale può avere (ha!) anche punti che reali non sono.

$x+y=0$ in $AG(2,\mathbb{C})$

ha come punti pure $(i,-i)$
che non é reale.

$$V(f)=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x+y=0\}$$

$$\overline{V(f)}=\{(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{C}^2 \mid x+y=0\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid \bar{x}+\bar{y}=0\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid \overline{x+y}=0\}=$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x+y=0\}=V(f).$$

<u>OSS</u>: $\overline{V(f)}=V(\bar{f})$

ove se $f(x,y)=\sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$

$$\bar{f}(x,y)=\sum_{i,j}\overline{a_{ij}}\,x^iy^j$$

DIM:

$$V(\bar f) = \{(x,y) \mid \bar f(x,y) = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \sum_{i,j} \bar a_{ij} x^i y^j = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \overline{\sum_{i,j} \bar a_{ij} x^i y^j} = 0\} =$$

$$= \{(x,y) \mid \sum_{i,j} a_{ij} \bar x^i \bar y^j = 0\} =$$

$$= \{(\bar x,\bar y) \mid \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = 0\} =$$

$$= \overline{V(f)} \qquad \square$$

Esercizio: DIMOSTRARE CHE UNA CURVA ALGEBRICA É REALE $\Leftrightarrow$ ESSA AMMETTE UNA EQUAZIONE $f(x,y)=0$ CON $f(x,y)$

a coeff. reali

Conseguenza

In $AG(2,\mathbb{C})$ le rette reali sono tutte e sole quelle che ammettono una equazione del tipo $ax+by+c=0$

con $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ $(a,b)\neq(0,0)$

e in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ le rette reali sono tutte e sole quelle che ammettono un'equazione del tipo

$$ax_1+bx_2+cx_3=0$$

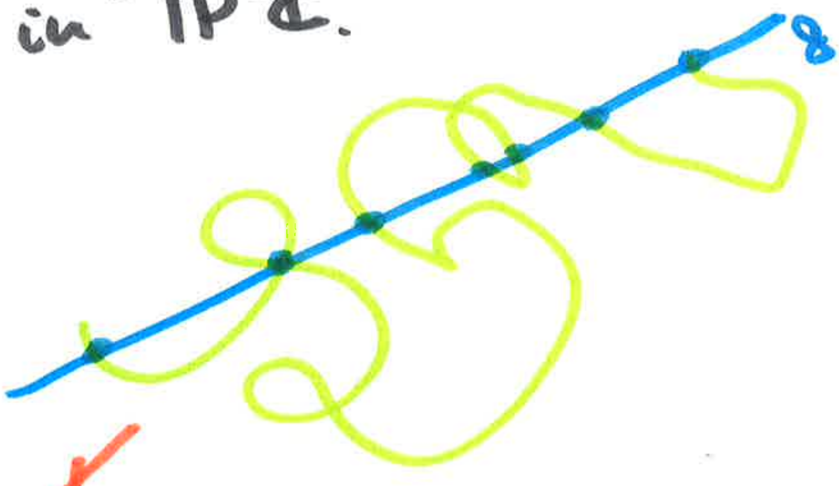
con $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\underline{0}\}$.

Teorema: Sia $F(x_1 x_2 x_3)$ un polinomio omogeneo di ~~grado~~ grado $n\geq 1$ a coeff. in $\mathbb{C}$. Allora ogni retta r di $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ che non è contenuta in $\tilde{V}(F)$ interseca $\tilde{V}(F)$ in

esattamente n punti
(a patto di contarli con molteplicità).

Def: Si dice ordine di una curva alg. $V(f)$ il numero di punti in cui una retta $r_0 \notin \tilde{V}(F)$ interseca $\tilde{V}(F)$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.

Teorema: L'ordine di $\tilde{V}(F)$ è uguale al grado di F in $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$.



N.B DOBBIAMO LAVORARE IN AMBITO AMPLIATO E COMPLESSIFICATO

1) In $AG(2,\mathbb{C})$ ci sono rette parallele

$r: X=0$ $\qquad$ $s: X=1$

$s \notin V(x)$ e $s \cap V(x) = \phi$

DOBBIAMO LAVORARE IN AMBITO AMPLIATO

2) in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ consideriamo

$$\tilde{V}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = \phi$$

$$x^2+y^2=-1$$

e quindi nessuna retta reale interseca $\tilde{V}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ in un punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

3) idem con $\tilde{V}(x_1^2+x_2^2-x_3^2)$

e rette che sono reali e non intersecano in punti reali.

DIM: $F(x_1\ x_2\ x_3)=0 \quad \deg F = n$

retta r rappresentata in forma parametrica.

$P=[(x_1'\ x_2'\ x_3')] \quad Q=[(x_1''\ x_2''\ x_3'')]$

$P \neq Q$ e $P, Q \in r$.

$$r \begin{cases} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'' \\ x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'' \\ x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'' \end{cases}$$

$(\lambda, \mu) \neq (0\ 0)$ e (λ, μ) proporzionali descrivono il medesimo punto.

$\big\downarrow$ sostituiamo in F

$$g(\lambda,\mu) := F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'')$$

$\downarrow$

polinomio omogeneo di grado $n = \deg F$ nelle variabili λ e μ.

$$g(\lambda,\mu) = a_0 \lambda^n \mu^0 + a_1 \lambda^{n-1} \mu^1 + \dots + a_n \lambda^0 \mu^n$$

Se $(a_0 a_1 \dots a_n) = \underline{0} \Rightarrow \forall (\lambda, \mu)$ il corrispondente punto di r appartiene a $\tilde{V}(F) \Rightarrow r \subseteq \tilde{V}(F)$

FINE.

DISTINGUIAMO 2 CASI

1) $a_0 \neq 0 \Rightarrow$ OSSERVIAMO CHE $g(1,0) = a_0 \neq 0$ dunque non ci sono soluzioni di $g(\lambda, \mu) = 0$ con $\mu = 0$.

DIVIDIAMO TUTTO per μ^n e poniamo $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$.

$$h(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_n \xi^0$$

ed ogni soluzione di $h(\xi) = 0$ corrisponde ad un punto di $r \cap \tilde{V}(F)$ con $(\lambda, \mu) = (\xi, 1)$.

poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso $h(\xi)$ ha $n = \deg h$ SOLUZIONI $\Rightarrow |r_\infty \cap \tilde{V}(F)| = n$ punti (contati con molteplicità).

2) Supponiamo $a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0$
$a_{k+1} \neq 0$

$$\Rightarrow g(\lambda, \mu) = \mu^k [a_k \lambda^{n-k} + \dots + a_n \mu^{n-k} \lambda^0]$$

OSSERVIAMO CHE
$(\lambda, \mu) = (0, 1)$ è soluzione di $g(\lambda, \mu) = 0$ k volte e non è soluzione di

$$g'(\lambda, \mu) = a_k \lambda^{n-k} \mu^0 + \dots + a_n \mu^{n-k} \lambda^0$$

posto $\zeta = \frac{\lambda}{\mu}$ e ottenuta $h'(\zeta)$ da $g'(\lambda, \mu)$ dividendo per μ^{n-k}

si vede che
$$h'(\zeta) = a_k \zeta^{n-k} + \dots + a_n$$

è un polinomio di grado $n-k$ e dunque ha $n-k$ radici che corrispondono a $(n-k)$ punti di $r \cap \tilde{V}(F)$

TOTALE: k volte il punto $(0,1)$

$+ (n-k)$ punti che vengono da $h'(\zeta)$

$= k + (n-k) = n$ punti $\square$