Ampliamento proiettivo di uno spazio affine.

$n=2$

$AG(2,\mathbb{K})$
$EG(2,\mathbb{R})$ e vogliamo studiare degli enti algebrici.

Def

Sia $f(x,y)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coeff. in $\mathbb{K}$.

Si dice curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$ il luogo dei punti di $AG(2,\mathbb{K})$ le cui coordinate appartengono all'insieme

$$V(f) := \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid f(x,y)=0\}.$$

Considereremo sempre in $AG(2,\mathbb{K})$ o $EG(2,\mathbb{R})$ un riferimento fissato.

→ Identifico i punti affini con le loro coordinate.

Esempio 1

$$f(x,y) = ax+by+c \qquad (a,b) \neq (0,0)$$

la curva algebrica di $V(f)$ è una retta.

Viceversa ogni retta è una curva algebrica di primo grado.

Esempio 2.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$V(f)$ è una ellisse con ~~$(a,b) \neq$~~ $a \neq 0 \neq b$.

Una proprietà fondamentale delle curve algebriche è il grado del polinomio che la definisce.

↓

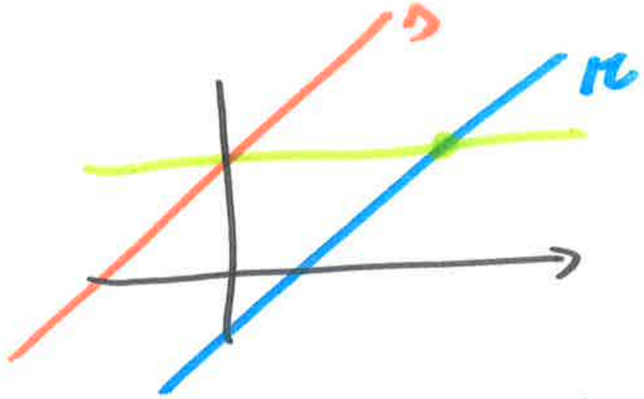
DOMANDA: ha il grado un significato geometrico?

Teorema: Sia $V(f)$ una curva algebrica con $\deg f(x,y) = n$.
Allora una retta del piano di tipo $y = ax+b$ interseca $V(f)$ in al più n punti o è contenuta in essa.

<u>DIM</u>: poniamo $g(x) = f(x, ax+b)$.
Se $g(x) \equiv 0$ identicamente $\Rightarrow r \subseteq V(f)$.
altrimenti $\deg g(x) \leq n$ e quindi $g(x) = 0$ ammette al più n radici. che corrispondono ad al più n punti di intersezione con la curva. $\square$

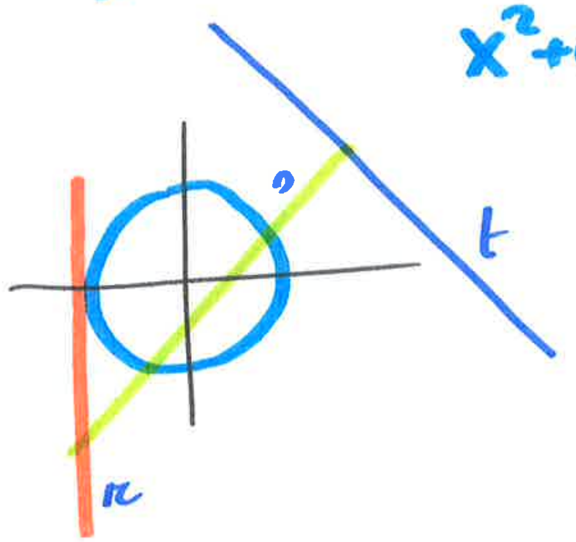
Problemi del teorema
1) perché non consideriamo le rette verticali?
2) il numero di intersezioni non è fissato.

ma dipende dalla retta scelta.



$s \parallel r$ con $s \neq r$

$x^2+y^2=1$



$|r \cap V(f)| = 1$

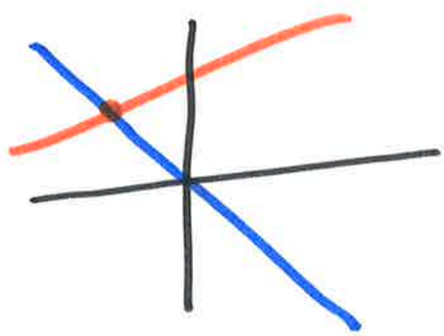
$|s \cap V(f)| = 2$

$|t \cap V(f)| = 0$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)(x+y)$$

$$V(f) = V(x+y)$$

ma $f(x,y)$ ha grado 3!



$\boxed{n=2}$

1) $\boxed{ax+by+c=0}$ $\quad (a,b)\neq(0,0)$

$$x=\frac{x_1}{x_3} \quad y=\frac{x_2}{x_3} \qquad x_3\neq 0$$

$$a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0$$

moltiplico tutto per x_3 ed ottengo

2) $\boxed{ax_1+bx_2+cx_3=0}$

Se $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$ é una soluzione di (2) con $\bar{x}_3\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_3},\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_3}\right)$ é una soluzione di (1).

Se $(\bar{x},\bar{y})$ é soluzione di (1) $\Rightarrow$

$(\alpha\bar{x},\alpha\bar{y},\alpha)$ é soluzione di (2)

$\forall\alpha$

$$a\alpha\bar{x}_1+b\alpha\bar{x}_2+c\alpha=\alpha(a\bar{x}_1+b\bar{x}_2+c)=0$$

In generale (2) ha anche altre soluzioni che non vengono da soluzioni di (1).

In particolare $\alpha(-b,a,0)$ sono sol. di (2) che non corrisp. a soluzioni di (1)

L'equazione (2) è una equazione omogenea in 3 incognite; le sue soluzioni sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^3$.

Consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{K}^3 \setminus (\mathbb{K}^2 \times \{0\}) \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$(x_1\ x_2\ x_3) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$
con $x_3 \neq 0$

manda "soluzioni della (2)" in punti soluzione della (1).

φ è suriettiva (basta vedere che per $x_3 = 1$ ottenere $\forall$ elemento di $\mathbb{K}^2$).

COME SONO FATTE LE PREIMMAGINI DI UN PUNTO $(\bar{x}, \bar{y})$?

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(y_1\ y_2\ y_3) = (\bar{x}, \bar{y})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_3} = \dfrac{y_1}{y_3} \\ \\ \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{y_2}{y_3} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 y_3 = y_1 x_3 \\ \\ x_2 y_3 = y_2 x_3 \end{array}$$

ma questo é lo stesso che dire

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1$$

cioé i vettori $(x_1\ x_2\ x_3)$ e $(y_1\ y_2\ y_3)$ sono proporzionali con coeff. di proporzionalità non nullo.

<u>**Def**</u>: Sia $P=(\bar{x},\bar{y}) \in AG(2,\mathbb{K})$ un punto.
Si dicono coordinate omogenee di P la classe di equivalenza $[(x_1\ x_2\ x_3)]$ tale che $\dfrac{x_1}{x_3}=\bar{x}$ $\dfrac{x_2}{x_3}=\bar{y}$

$x_3 \neq 0$

ovvero $[(x_1\, x_2\, x_3)] = [(\bar{x}, \bar{y}, 1)]$ rispetto la relazione di equivalenza definita su $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$.

$(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha' \beta' \gamma') \Leftrightarrow$

$$rk \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 1$$

OSSERVAZIONI.

1) $[(\alpha, \beta, \gamma)] = \mathcal{L}((\alpha\, \beta\, \gamma)) \setminus \{0\}$.

Spesso identificheremo la classe di equivalenza di un vettore con il sottospazio vettoriale da essa generato.

Però il vettore $(0\ 0\ 0)$ <u>NON RAPPRESENTA ALCUN PUNTO!!</u>

2) $\exists$ una corrispondenza 1-1 biettiva fra i sottospazi di $\mathbb{K}^3$ che hanno dimensione 1 e sono generati da vettori del tipo (x, y, α) con $\alpha \neq 0$ e

i punti di $AG(2,\mathbb{K})$.

3) chiamiamo <u>punti propri</u> della geometria

$$\mathbb{P}^2\mathbb{K} = \mathbb{P}\,\mathbb{K}^3 = PG(2,\mathbb{K})$$

(geometria proiettiva di dimensione 2 sul campo $\mathbb{K}$, costruita a partire da $\mathbb{K}^3$). i sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{K}^3$ ~~[illegible]~~ che corrispondono a punti di $AG(2,\mathbb{K})$.

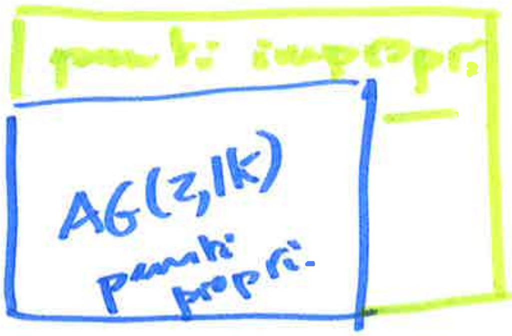
chiamiamo <u>punti impropri</u> di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ i sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{K}^3$ che non corrispondono a punti di $AG(2,\mathbb{K})$.

i.e. sottospazi 1-dimensionali generati da vettori del tipo

$$(l, m, 0) \qquad \text{con } (l,m) \neq (0,0)$$

e corrispondenti a classi di proporz.

$[(l, m, 0)]$.



I punti di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ sono i sottospazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{K}^3$.

- punti propri (punti affini) = punti di AG(2, IK) rappresentati qui.

- punti impropri

$$(2) \quad a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

(eq. omogenea della retta).

Le soluzioni della (2) formano uno spazio vettoriale sott. di $\mathbb{K}^3$ di dimensione 2.

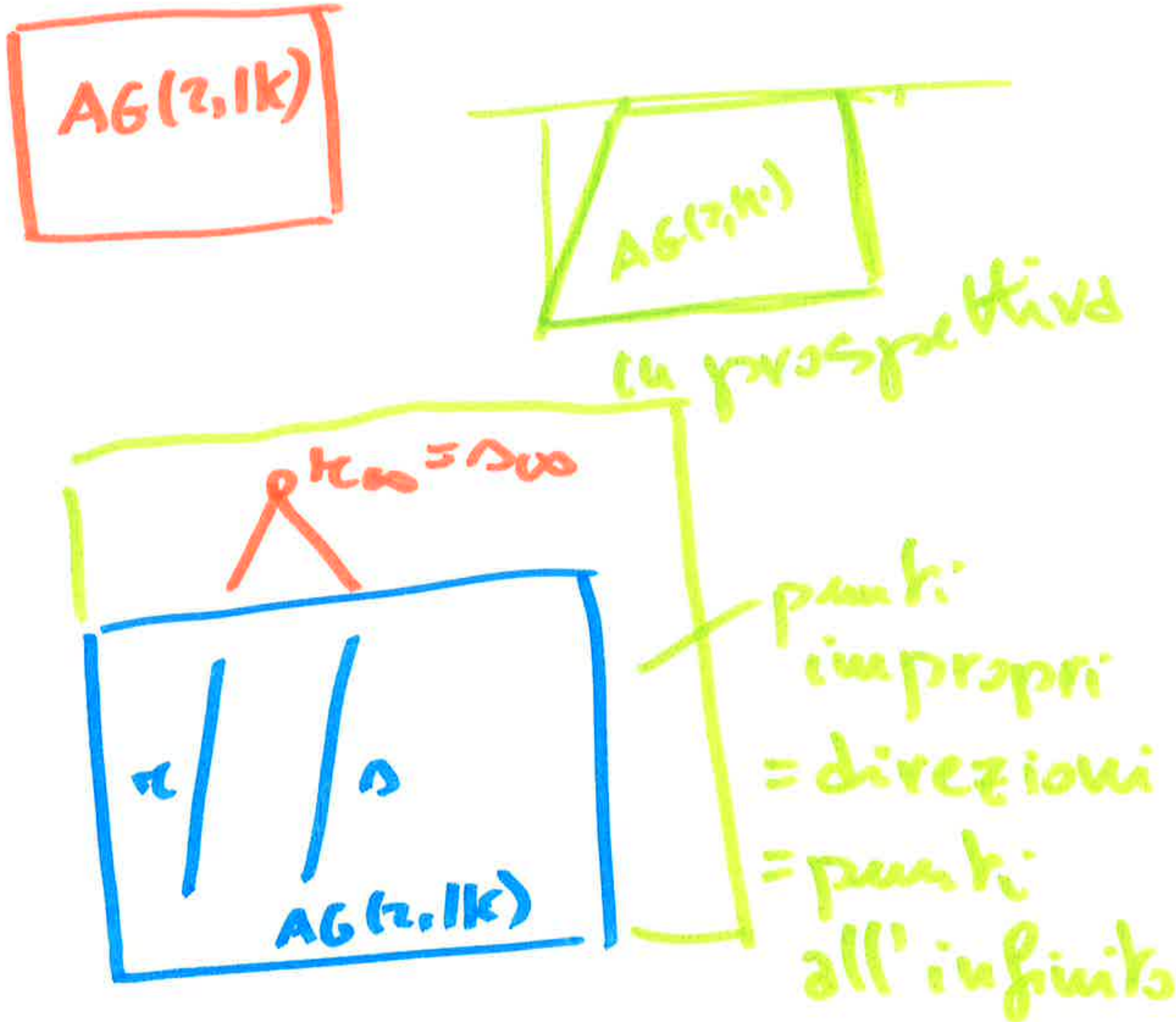
I punti impropri contenuti in esso si ottengono cercando le soluzioni con $x_3 = 0$

$$(*)\begin{cases} a x_1 + b x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

1) le soluzioni di $(*)$ sono uno s.vett di dimensione $= 1 \Rightarrow$ sono 1 punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$.

2) Sono del tipo $[(-b, a, 0)]$ ma $\alpha(-b, a)$ $\alpha \neq 0$ corrisponde proprio alla direzione della retta. perché risolvere $(*)$ è in ultima istanza la stessa cosa che risolvere il sistema omogeneo associato alla retta.

$\boxed{\text{I punti impropri rappresentano le direzioni delle rette.}}$



= punti di fuga per le rette se disegnassimo in prospettiva.

<u>Teorema</u>: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette distinte si intersecano sempre.

Def: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ si dice <u>retta</u> l'insieme di tutti i punti (= sottospazi 1-dim. di $\mathbb{K}^3$) contenuti in uno spazio vettoriale 2-dimensionale di $\mathbb{K}^3$.

retta = insieme dei punti che soddisfano una equazione

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0\ 0\ 0)$.

In particolare se $(a, b) \neq (0\ 0)$ abbiamo che una retta di $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ corrisponde ad una retta di $AG(2, \mathbb{K})$.

Se $(a, b) = (0, 0)$ abbiamo l'eq. $x_3 = 0$ ed otteniamo tutti i punti impropri $\rightarrow$ retta impropria.

o retta all'infinito.

In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ si lavora con sottospazi vettoriali invece che con sottospazi affini.

(AD OGNI SPAZIO AFFINE CORRISPONDE UN SOTT. VETTORIALE DI $\mathbb{K}^3$).

É PIÙ FACILE (molto più facile)!

Teorema: In $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ due rette hanno sempre almeno un punto in comune.

DIM: Sia $r = V_2$; $s = W_2 \leq \mathbb{K}^3$

$\dim V_2 = \dim W_2 = 2$

$\dim V_2 \cap W_2 \geq 1$ $\square$

$$3 \geq \dim V_2 + W_2 = \underbrace{\dim V_2}_{2} + \underbrace{\dim W_2}_{2} - \underbrace{\dim V_2 \cap W_2}_{\geq 1}$$

In particolare se r ed s non hanno punti propri in comune dovranno avere lo stesso punto improprio $\Rightarrow r // s$.

<u>OSS</u>: Siano $P = [(x_1' \; x_2' \; x_3')]$

$Q = [(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')]$

due punti distinti.

La retta $r = PQ$ corrisponde allo spazio vettoriale $P \oplus Q$.

$P, Q \in r$. $\qquad [P; \mathcal{L}(\vec{PQ}))$

L'equazione omogenea di r è del tipo

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Supponiamo ora di cercare i punti propri di r e che

$P = [(x_P \; y_P \; 1)]$

$Q = [(x_Q, y_Q, 1)]$ siano punti propri

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

otteniamo che la condizione di allineamento corrisponde esattamente a che un ~~punto rappresentante~~ vettore appartenga ad un opportuno spazio vettoriale.

punti affini → punti propri in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$

direzioni affini → punti impropri in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$.

rette → sottospazi di $\mathbb{K}^3$ di $\dim = 2$ descritti da $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $(a,b) \neq (0,0)$.

$ax + by + c = 0$

→ rette proprie.

retta impropria di $\mathbb{K}^2$
sottospazio descritto
da $x_3 = 0$.

più in generale.

$\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ $\qquad n \geq 2$.

1) Punti $\to$ classi di proporzionalità di vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$
$\to$ sottospazi 1-dim di $\mathbb{K}^{n+1}$

2) Iperpiani $\to$ soluzioni di una eq. omogenea in $n+1$ incognite
$\to$ sottospazi n-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$.

3) Retta $\to$ soluzioni di un sistema omogeneo di $n-1$ equazioni in $n+1$ incognite
$\to$ sottospazi 2-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$

4) Piani $\to$ sottospazi 3-dim. di $\mathbb{K}^{n+1}$ ...
etc.

Si dicono punti, rette, piani, etc. propri quelli che vengono mediante omogeneizzazione da punti/rette, piani etc. di $AG(n, \mathbb{K})$.

Impropri (o all' ∞) tutti gli altri.

Esplicitamente.

Sia S un sottospazio affine di $AG(n, \mathbb{K})$ descritto da una equazione matriciale

$$AX = B \qquad rk(A) = rk(A|B)$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B \qquad \dim S = n - rk(A).$$

passiamo a coordinate omogenee in $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$

$$x_i = \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}} \qquad AX = B$$

$$A \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{\xi_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} \end{bmatrix} = B \qquad A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \xi_{n+1} B$$

$(\xi_{n+1} \neq 0)$

$$\boxed{(A|B) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}}$$

equazione omogenea

$\Downarrow$

le soluzioni sono uno sp. vettoriale di dim $= (n+1) - rk(A|B)$

$= (n+1) - rk(A) =$

$= \dim S + 1$

che rappresentano $\infty^{\dim S}$ punti.

$n=3$

$$\mathbb{P}^3\mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}^4 \setminus \{0\}}{\mathbb{K}\setminus\{0\}}.$$

punti: $[(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)]$

con $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) \neq \underline{0}$

e $x_4 \neq 0$ se sono punti propri

$x_4 = 0$ se sono punti impropri = direzioni delle rette.

rette insiemi di punti le cui coordinate omogenee sono classi di proporzionalità di di autosoluzioni di un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4 = 0 \end{cases}$$

con le condizioni.

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

[intersezione di 2 piani distinti].

se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ e $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ rette proprie.

se $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ rette improprie (sono l'intersezione di 2 piani paralleli) $\Rightarrow$ corrispondono alla giacitura di tali piani.

<u>piani</u>: insiemi di punti le cui coordinate etc. etc. di una eq. lineare omogenea del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$

$(a, b, c, d) \neq 0$

$\rightarrow$ se $(a, b, c) \neq (0\,0\,0)$ piani propri

se $(a, b, c) = 0 \longrightarrow x_4 = 0$ ~~piano~~ piano improprio.

Teorema: In $\mathbb{P}^3\mathbb{K}$ due piani distinti si intersecano in una retta.

Dim: $6-4=2$

i piani corrispondono a sott. 3-dimensionali di $\mathbb{K}^4$

$$3+3-\dim U\cap W \leq 4$$

$\square$