DISTANZA PUNTO/IPERPIANO.

$EG(n; \mathbb{R})$

$P = (\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$

$\Pi : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$

$$\Rightarrow \quad d(P, \pi) = \frac{|a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

$\bar{n} = (a_1 \dots a_n) \Rightarrow \|\bar{n}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

$n = 2$: $\quad P = (x_P, y_P)$

$r : ax + by + c = 0$

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$n = 3$ $\quad P = (x_P, y_P, z_P)$

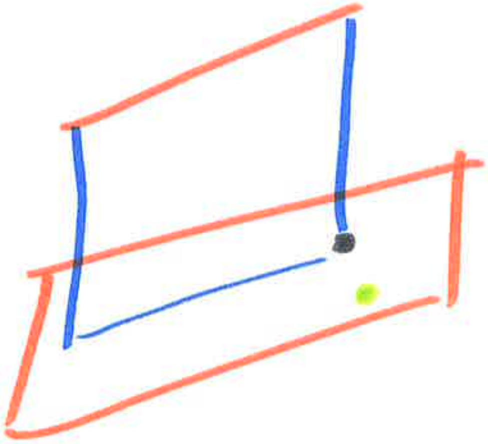
$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

DISTANZA FRA SOTTOSPAZI PARALLELI.

Siano $\Pi = [P; \mathcal{U}]$ e $\Sigma = [Q; W]$

due sottospazi paralleli con $\mathcal{U} \subseteq W$.



Obiettivo: DIMOSTRARE CHE

$$\forall X, Y \in \Pi : d(X, \Sigma) = d(Y, \Sigma).$$

(N.B. NON É VERO IL "VICEVERSA" SCAMBIANDO Π con Σ a meno che $\dim \Pi = \dim \Sigma$).

1) Siano Π e Σ due iperpiani

$\Rightarrow \forall X, Y \in \Pi : d(X, \Sigma) = d(Y, \Sigma).$

Π ha eq. $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b = 0$

Σ ha eq. $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b' = 0$

Sia $X=(\xi_1 \dots \xi_n) \in \pi$.

$$\Rightarrow d(X,\Sigma)=\frac{|a_1\xi_1+\dots+a_n\xi_n+b'|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}$$

ma $X \in \pi \iff a_1\xi_1+\dots a_n\xi_n+b=0$

$\Rightarrow$ il numeratore é $|b'-b|$.

e questo NON DIPENDE da X

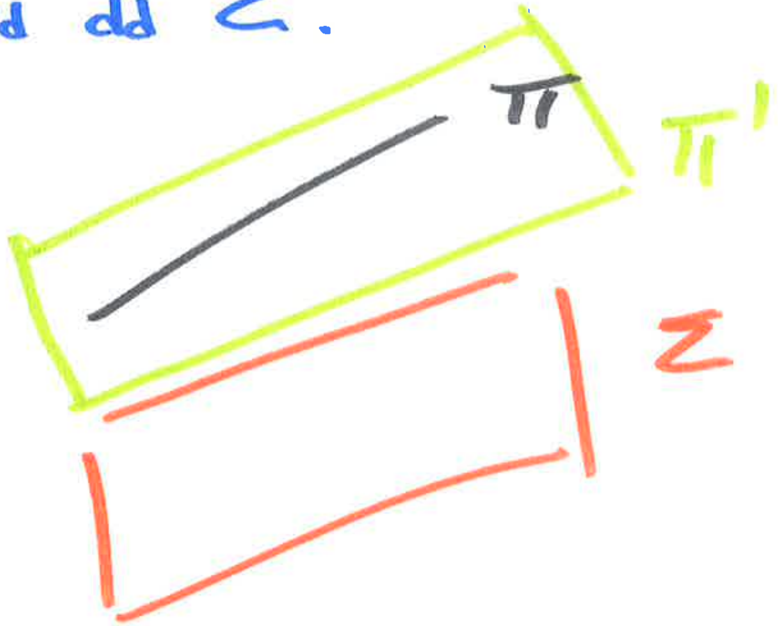
$$d(X,\Sigma)=d(\pi,\Sigma)=\frac{|b'-b|}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}.$$

Formula della distanza fra 2 rette parallele nel piano o 2 piani paralleli nello spazio.

2) Siano π un sottospazio parallelo a Σ e Σ un iperpiano.

OSSERVIAMO CHE $\pi'=[P;W]$ É UN IPERPIANO PARALLELO A Σ e vale che $\pi \subseteq \pi'$.

ALLORA PER (1) tutti i punti di Π' sono alla medesima distanza da Σ $\Rightarrow$ in particolare tutti i punti di $\Pi \subseteq \Pi'$ sono alla medesima distanza da Σ.



3) Siano $\Pi = [P; U]$ $\Sigma = [Q; W]$ due sottospazi con $U \subseteq W$.

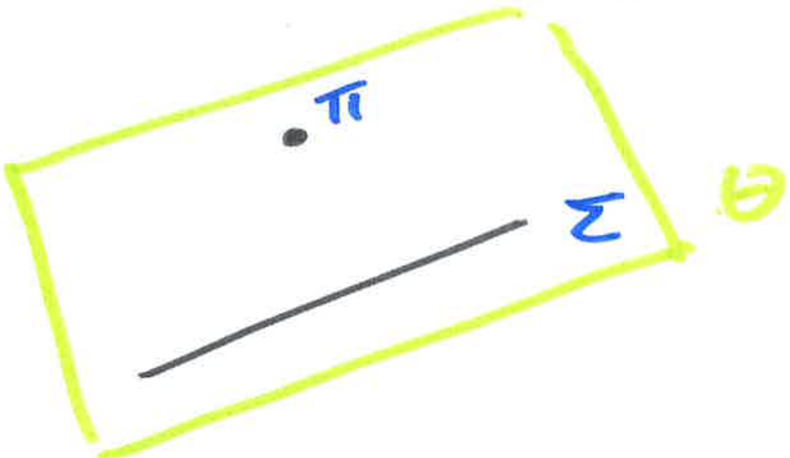
OSSERVIAMO CHE LO SPAZIO

$$\Theta = [Q; W + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$$

contiene Σ; contiene Π e in esso Σ è un iperpiano perché $\dim \Sigma = \dim \Theta - 1$

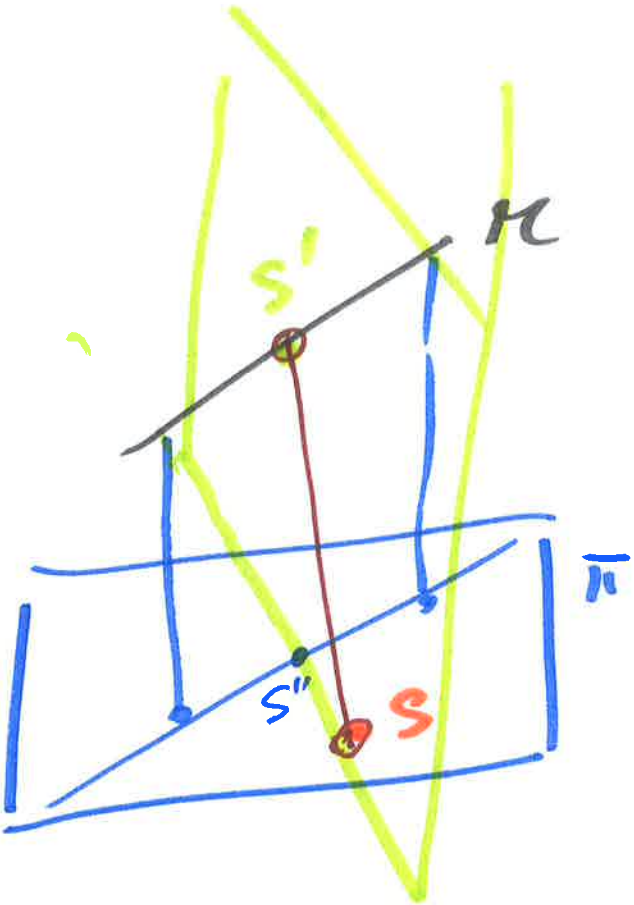
In particolare in Θ la distanza fra 2 punti di Π e Σ è costante.

Ma dunque la distanza fra 2 punti di Π e Σ è costante sempre perché non dipende dal sottospazio Θ che stiamo considerando. $\square$



Def: Si dice distanza fra due sottospazi paralleli Π e Σ la quantità

$$d(\Pi, \Sigma) = \begin{cases} d(X, \Sigma) & \text{se } \dim \Sigma \geq \dim \Pi \text{ con } X \in \Pi \\ d(X, \Pi) & \text{se } \dim \Sigma \leq \dim \Pi \text{ con } X \in \Pi \end{cases}$$



$r \parallel \pi$

$S' = r \cap \sigma$ con σ piano $\perp r$ per S.

S'' = proiezione di S' su π.

$\|S'S''\| = d(S', \pi) \leq \|\overrightarrow{S'S}\|$

in quanto $\overrightarrow{S'S} = \overrightarrow{S'S''} + \overrightarrow{S''S}$

e dunque $\|S'S\|^2 = \|S'S''\|^2 + \|S''S\|^2$

Esercizio: in $\mathcal{E}G(3,\mathbb{R})$ determinare il luogo dei punti a distanza 2 dal piano

$$3x+4y+5=0$$

DIM:
$$\frac{|3x+4y+5|}{\sqrt{9+16}}=2$$

$$|3x+4y+5|=10$$

Il luogo assegnato è l'unione di 2 piani paralleli.

$$3x+4y+5=10$$

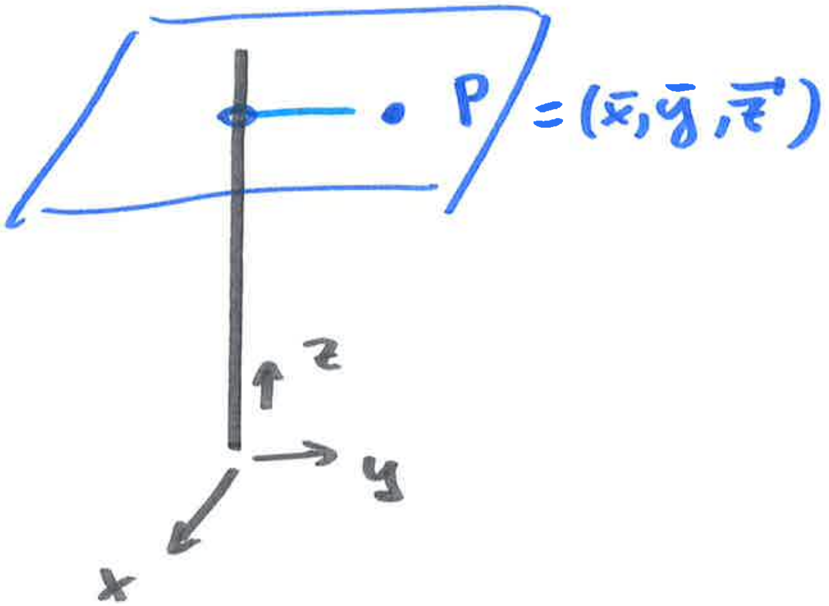
$$3x+4y+5=-10$$

N.B se volete una unica eq. per questo luogo ottenete il prodotto delle 2 eq. date.

$$(3x+4y-5)(3x+4y+15)=0$$

Esercizio: Determinare il luogo dei punti di $EG(3,\mathbb{R})$ a distanza 2 dalla retta

$$r \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Sia $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto generico e consideriamo il piano $\perp r$ passante per P. Questo piano ha eq. $z = \bar{z}$. Interseca r nel punto $(0\ 0\ \bar{z}) = \bar{P}$

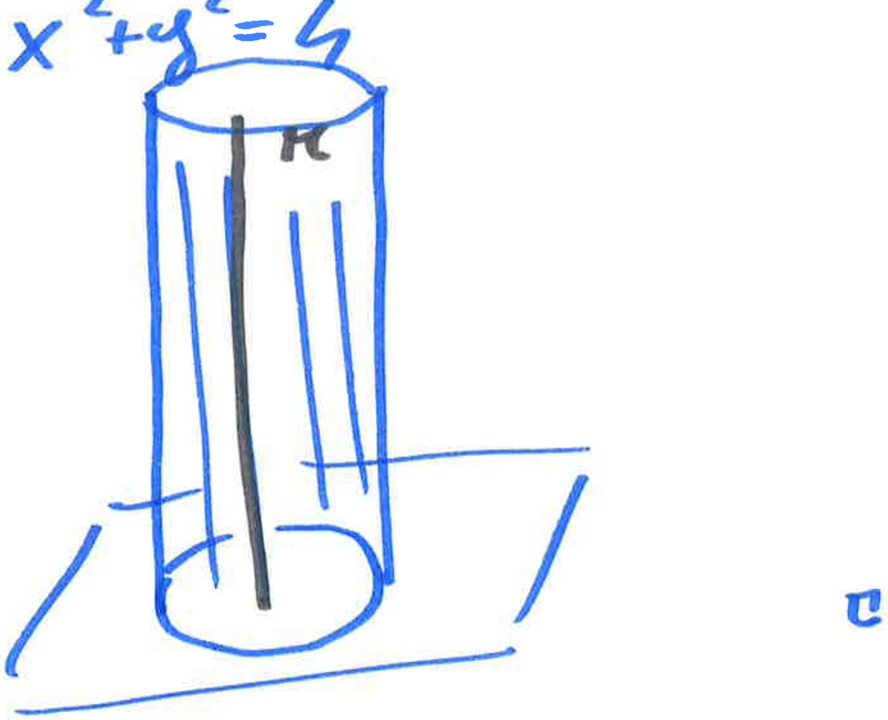
$$d(P, r) = d(P\bar{P}) = \sqrt{(0-\bar{x})^2 + (0-\bar{y})^2 + (\bar{z}-\bar{z})^2}$$

$$= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

l'eq. che noi vogliamo è

$d(P, r) = 2 \Rightarrow \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 4$

e l'eq. del luogo è



Il luogo dei punti a distanza d fissata da una retta è un cilindro a base circolare.

circonferenza su piano ⊥ alla retta e per ogni punto della circonf. prendere la retta // ad r.

DISTANZA FRA 2 RETTE SGHEMBE.

$r := [P; V_1]$

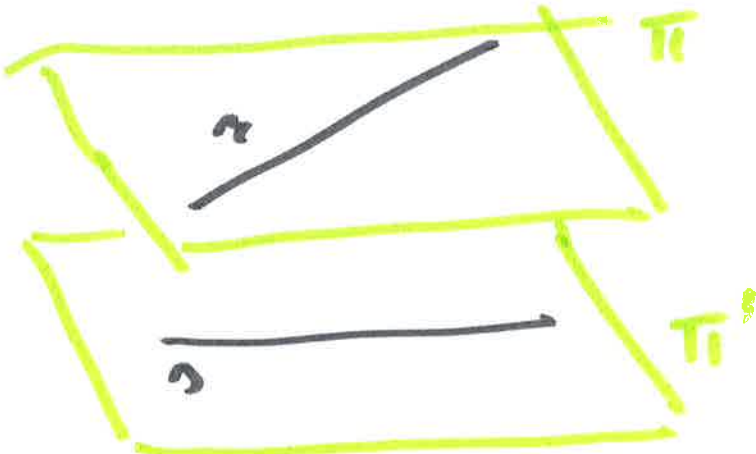
$s := [Q; W_1]$

rette sghembe in $EG(3, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow \exists$ due (iper)piani paralleli π, π' con $r \subseteq \pi$ e $s \subseteq \pi'$.

$$\pi = [P; V_1 \oplus W_1]$$

$$\pi' = [Q; V_1 \oplus W_1]$$



OGNI PUNTO DI π è alla medesima distanza da ~~[illegible]~~ π'.

$$d(r,s) = \min\{d(X,Y) \mid X \in r, Y \in s\}$$

$$\geq d(\pi', \pi) = \min\{d(X,Y) \mid X \in \pi, Y \in \pi'\}.$$

vogliamo far vedere che

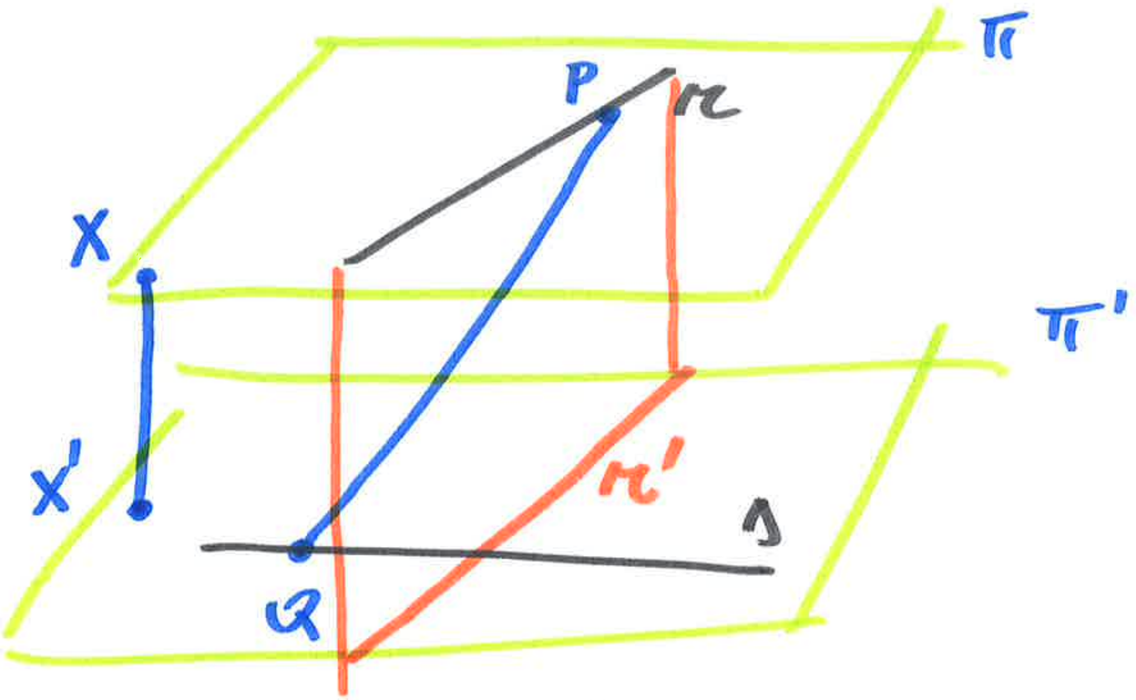
$$\boxed{d(r,s) = d(\pi,\pi')}$$

ci basta far vedere che

$\exists\,(P,Q) \in r \times s$ tali che $\overrightarrow{PQ} \perp \pi$

perché in quel caso $d(P,Q) = d(\pi,\pi')$

e quindi saremmo a posto.



considerıamo la proiezione ortogonale di r su π' e chiamiamo questa retta r'

<u>OSS</u>: $r' \parallel r$ (lo si può dimostrare facendo vedere che la proiezione ort. di un sottospazio su di un sott. ad

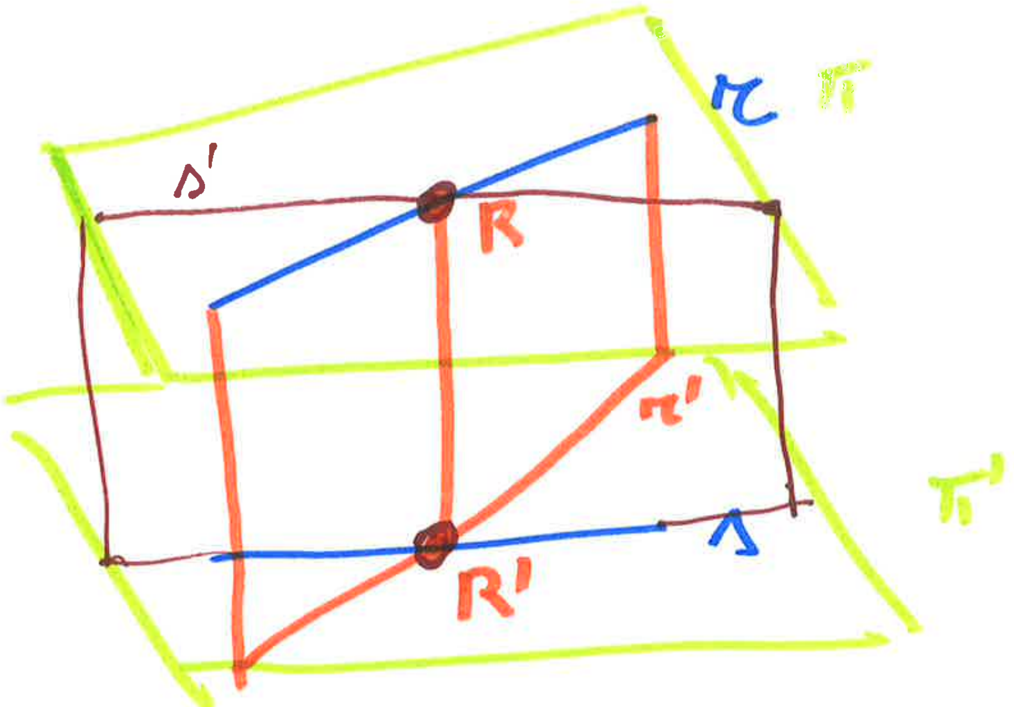
esso parallelo è ancora parallela ad esso).

$r' \cap s \neq \emptyset$ in quanto $r \parallel r'$ e $r \not\parallel s$. Sia R' il punto $r' \cap s$.

$\Rightarrow$ R' è proiezione ortogonale di un punto $R \in r$ su π.

$\Rightarrow R'R \perp \pi \Rightarrow d(R', R) = d(\pi', \pi)$

e $R \in r$, $R' \in s \Rightarrow d(r, s) = d(\pi, \pi')$.



$\square$

Lemma: Siano P, Q, R tre punti e sia $\Sigma = [T; W]$ un sottospazio di $EG(n, \mathbb{R})$.

Denotiamo con $\varphi: EG(n, \mathbb{R}) \to \Sigma$ la proiezione ortogonale.

Allora $\varphi(P + \overrightarrow{QR}) = \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}$

DIM: Fissiamo un R. Ortogonale tale che Σ abbia equazioni

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0 \\ x_{k+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

(Basta prendere come origine T e come base del riferimento una base ortonormale del sott. W completata a base di $V_n^0(\mathbb{R})$ ortonormale).

→ IN QUESTO RIFERIMENTO, SE

$$P = (\xi_1 \dots \xi_n)$$

$$\Rightarrow \varphi(P) = (\xi_1 \dots \xi_k \, 0 0 \dots 0).$$

poniamo $P = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$Q = (\beta_1 \dots \beta_n)$

$R = (\gamma_1 \dots \gamma_n)$

ed osserviamo che

$$P + \overrightarrow{QR} = (\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 \dots \alpha_n + \gamma_n - \beta_n)$$

$$\varphi(P + \overrightarrow{QR}) = (\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 \dots \alpha_k + \gamma_k - \beta_k \, 0 0 \dots 0).$$

FACCIAMO IL MEDESIMO CONTO PER

$\varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}$ e vediamo

CHE IL RISULTATO È UGUALE.

In particolare se

$\Pi = [P; U] \quad \Sigma = [Q; W]$

con $U \subseteq W$ e φ proiez. in Σ.

Abbiamo

$$\varphi(\Pi) = [\varphi(P); \mathcal{U}]$$

infatti, fissiamo come primo un riferimento in cui Σ ha equazioni $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$

CHIARAMENTE $\varphi(P) \in \varphi(\Pi)$.

Inoltre $\mathcal{U} \leq W$.

possiamo scrivere i vettori di $\mathcal{U}$ come $\boxed{\overrightarrow{\varphi(P)X}}$ con X opportuno in Σ. d'altro canto ~~se~~ necessariamente

$X = \varphi(X')$ con $X' \in \Pi$ perché

$$\underbrace{X'}_{\in \Pi} = P + \underbrace{\overrightarrow{\varphi(P)X}}_{\in \mathcal{U}} \Rightarrow \varphi(X') = \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi(P)X} = X.$$

In particolare ogni vettore di $\mathcal{U}$

Si scrive come $\boxed{\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(x')}}$

con $x' \in \pi$. Ma la mappa

φ applicata 2 volte è idempotente

i.e. $\varphi(\varphi(P)) = \varphi(P)$

$\Rightarrow$ OGNI VETTORE DI $\mathcal{U}$

VIENE MANDATO DA $\tilde{\varphi}$ in

se stesso ove

$\tilde{\varphi}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$.

Ne segue $\varphi(\pi) = [\varphi(P); \mathcal{U}]$.

$\square$

La proiezione ortogonale su Σ

di Σ è l'identità.

$$\overrightarrow{\varphi(\varphi(P))\cancel{\varphi}\varphi(x'))} = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(x')}$$

Luogo geometrico $\Rightarrow$ insieme di punti che soddisfano certe proprietà. $\rightarrow$ Sottoinsieme di $EG(n, \mathbb{R})$.

In generale vogliamo poter descrivere dei luoghi geometrici mediante equazioni.

$\downarrow$

STUDIANDO "meccanicamente" le equazioni vogliamo investigare le proprietà di tali insiemi di punti.

VISIONE GEOMETRICA / VISIONE ALGEBRICA

Asse fra 2 punti

$P, Q \in EG(n, \mathbb{R})$

vogliamo trovare il luogo dei punti X tali che

$$d(X,P)=d(X,Q).$$

$n=2$
$$P=(x_P,y_P)$$
$$Q=(x_Q,y_Q)$$
$$X=(x,y)$$

$$d(P,X)=d(Q,X)$$

$$\iff$$

$$d(P,X)^2=d(Q,X)^2$$

$$\iff (x-x_P)^2+(y-y_P)^2=(x-x_Q)^2+(y-y_Q)^2$$

$$x^2+x_P^2-2xx_P+y^2+y_P^2-2yy_P=$$
$$=x^2+x_Q^2-2xx_Q+y^2+y_Q^2-2yy_Q$$

$$\boxed{2x(x_Q-x_P)+2y(y_Q-y_P)=x_Q^2-x_P^2+y_Q^2-y_P^2.}$$

oss 1) l'asse è una retta!

2) l'asse è $\perp$ al vettore $\overrightarrow{PQ}$

Def: Siano P, Q due punti.
Si dice punto medio fra P e Q il punto $M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

OSS: $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ in quanto

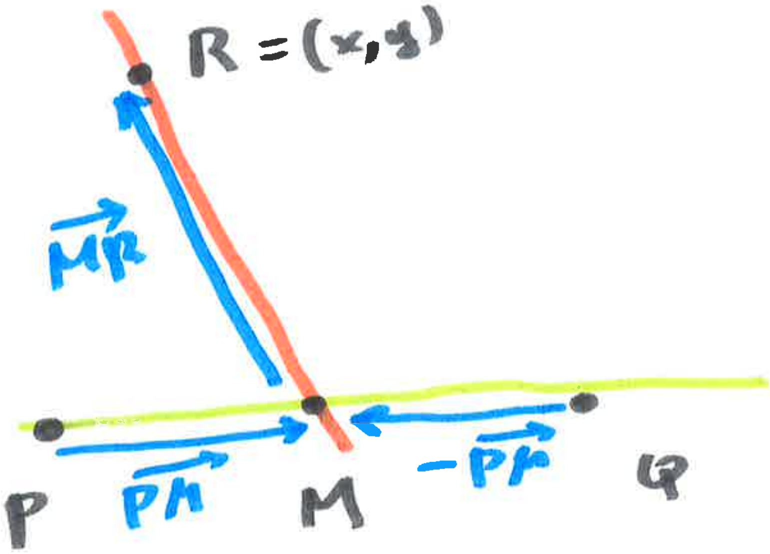
$$M + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{PQ} = Q$$

e quindi $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ e in particolare se siamo in uno spazio euclideo

$$d(P,M) = \|\overrightarrow{PM}\| = \|\overrightarrow{MQ}\| = d(P,Q).$$

In generale M appartiene all'asse.

Teorema: ($n=2$) L'asse fra P e Q è la retta per M ortogonale alla direzione $\overrightarrow{PQ}$ ove M punto medio fra P e Q.



R un punto tale che

$$d(P,R) = d(Q,R) \iff$$

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{QR}\|^2$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MR}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR} = -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} =$$

$$= -\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MR}$$

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2 + 2\,\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MR}$$

$$\|\overrightarrow{QR}\|^2 = \|\overrightarrow{QM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2 + 2\,\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{MR} =$$

$$= \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MR}\|^2 - 2\,\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MR}$$

sono uguali $\iff$ $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MR} = 0$

cioè R appartiene alla retta

per M ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ (ovvero a $\overrightarrow{PM}$). $\square$

In generale se $n \geq 2$ la seconda dimostrazione evidenzia che la condizione su R è quella di essere sull'iperpiano per M ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ (senza bisogno di fare calcoli ulteriori).
Nella prima si dovrebbero fare i conti $\forall n$.

$n=2$ circonferenza
$n=3$ sfera
$n>3$ (iper)sfera.

Def Sia P un punto in $EG(2,\mathbb{R})$ si dice <u>circonferenza</u> di centro P e raggio $r>0$ il luogo dei punti a distanza r da P.

Es. equazioni

$$P = (x_0, y_0)$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

equazione di II grado.

$$x^2-2x_0x+y^2-2y_0y=r^2-x_0^2-y_0^2$$

voglio generalizzare l'equazione.

$$\boxed{\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y=\delta.} \qquad \alpha\neq 0$$

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \qquad \frac{\beta}{\alpha} = -2x_0$$

$$y_0 = -\frac{\gamma}{2\alpha}$$

$$\delta = (r^2-x_0^2-y_0^2)\alpha$$

$$\frac{\delta}{\alpha} = r^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}$$

$$r^2 = \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha^2} > 0$$

"circonferenza generalizzata".

(1) $\alpha = 0 \rightarrow$ OTTENIAMO UNA RETTA $(\beta, \gamma, \delta) \neq (0,0)$.

$\alpha \neq 0$, $\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha^2} > 0 \rightarrow$ CIRCONFERENZA.

(2) $\alpha \neq 0$, $\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha^2} = 0 \rightarrow$ "circonferenza" di raggio $= 0$

$\rightarrow$ UN PUNTO

(3) $\alpha \neq 0$ $\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha^2} < 0 \rightarrow \phi$

I casi (1), (2), (3) hanno un "senso" dal punto di vista geometrico

$\downarrow$

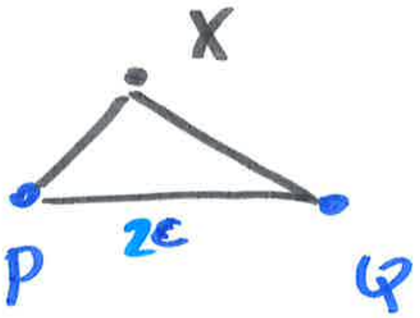
bisogna metterci in un ambiente geometrico "più grande" rispetto quello della geometria Euclidea.

Esercizio.

Siano P, Q due punti di $EG(2,\mathbb{R})$. Si trovi il luogo geometrico di tutti i punti X tali che

$$d(P,X)+d(Q,X) = d.$$

con c costante.



$$d(P,X)+d(Q,X)=d$$

$$d(P,Q)=2c$$

vediamo che $d \geq 2c$ per la dis. triangolare.

$$P=(-c,0) \qquad Q=(+c,0)$$

$$X=(x,y).$$

$$\left[(x+c)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[(x-c)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}=d$$

$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2-d^2=$$

$$-2\left[(x+c)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[(x-c)^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$2(x^2+y^2+c^2)-d^2=-2\cdot$$

$$\left[(x+c)^2(x-c)^2+y^2(x+c)^2+y^2(x-c)^2+y^4\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-2\left[(x^2-c^2)^2+y^2(x^2+c^2)+y^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

sotto l'ipotesi che $2(x^2+y^2+c^2)<d^2$

$$(x^2+y^2+c^2)^2+\frac{d^4}{4}+d^2(x^2+y^2+c^2)=$$

$$\cancel{(x^2+c^2+y^2)^2}\ x^4+c^4-2x^2c^2+$$

$$+y^4+2y^2x^2+y^2c^2$$

$$\cancel{x^4}+\cancel{y^4}+\cancel{c^4}+2\cancel{x^2}y^2+\cancel{2y^2c^2}+2x^2c^2$$

NO

$$\frac{d^4}{4}+d^2(x^2+y^2+c^2)=$$

$$\cancel{x^4}+\cancel{c^4}+\cancel{y^4}-2x^2c^2+\cancel{2y^2x^2}+y^2c^2$$

ALLA FINE SI OTTIENE UNA EQ. DI II GRADO IN x ed y.

$$\left[\, x^2(d^2+4c^2)+y^2(d^2+c^2)=\frac{d^4}{4}-d^2c^2 \,\right]$$

A MENO DI ERRORI DI CALCOLO.

<u>OSS</u> CHE $d>2c \Rightarrow$

$\frac{d^2}{4}>c^2$ quindi il termine a dx è positivo.

Inoltre. $x^2 \leq \frac{d^2-4c^2}{4d(d^2+4c^2)}$ $y \leq \frac{d^4-4d^2c^2}{4(d^2+c^2)}$

e queste condizioni $\Rightarrow$ le disug. di prima.