Studiare le posizioni reciproche di due sottospazi → studiare il sistema dato dalle loro equazioni.

Se avete 3 o più sottospazi bisogna considerare le possibili posizioni reciproche anche a 2 a 2 degli stessi.

$$\pi_K : x + z = 0$$

$$\sigma_K : 2x - y = 2$$

$$\vartheta_K : kx + y + (k+2)z = 0$$

$\pi_K \cap \sigma_K \cap \vartheta_K$

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ k & 1 & k+2 & 0 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 2 \quad \forall k$

$$rk(A|B) = 3 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= -2$$

I 3 piani dati non si intersecano in punti di $AG(3,\mathbb{K})$.

→ FASCIO IMPROPRIO DI PIANI

→ STELLA IMPROPRIA DI PIANI.

π_k e σ_k → incidenti in una retta

π_k e ϑ_k $$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & k+2 & 0 \end{array}\right]$$ $$\underbrace{\hphantom{1\ 0\ 1}}_{rk=2}$$

π_k e ϑ_k → incidenti in una retta $\forall k$

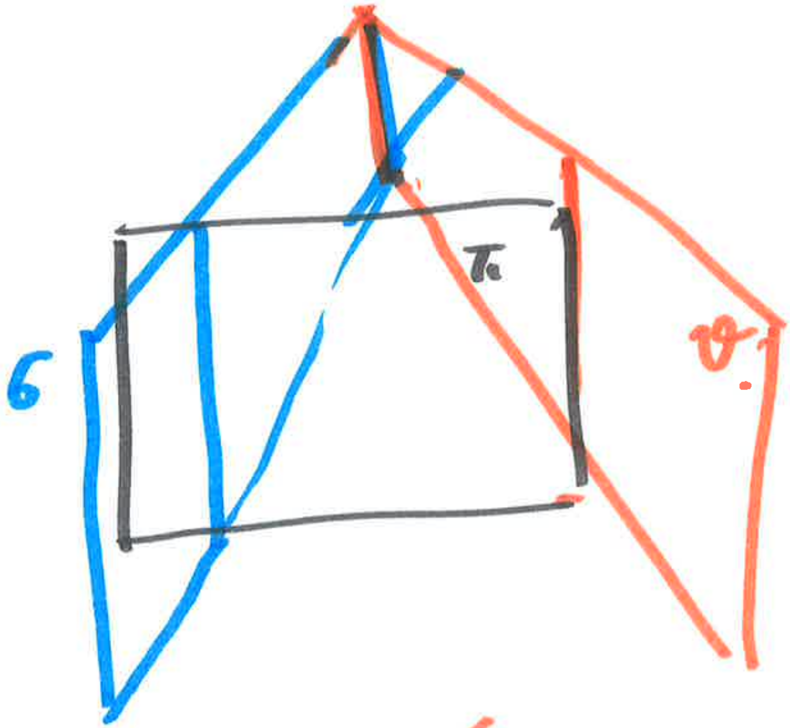
σ_k e ϑ_k $$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 2 \\ k & 1 & k+2 & 0 \end{array}\right]$$

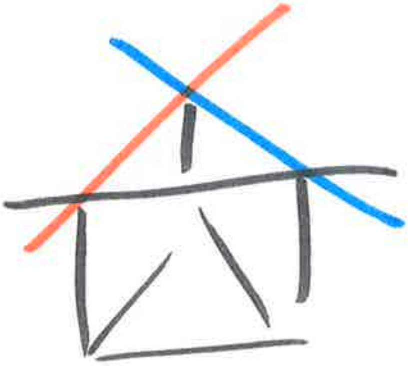
↓

$rk=2$ se $k\neq -2$ | 2

$rk=1$ se $k=1$ | 2

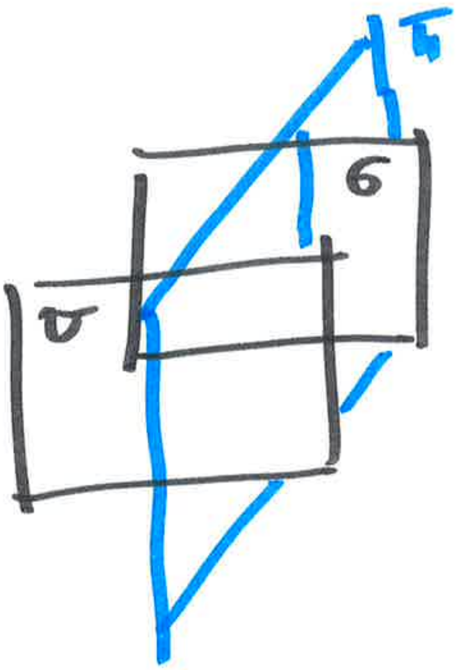
$\sigma_k \parallel \vartheta_k$ se $k=-2$; $\sigma_k \cap \vartheta_k$ in una retta altrimenti

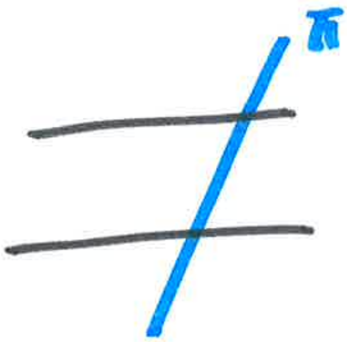




$k \neq 2$

$k = 2$





$$r \begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

$$\pi_k \quad kx+y+(k+2)z=0$$

studiare ~~l'int. geometrica~~ le pos. reciproche della retta r e del piano π. al variare di k.

$rk(A)=2 \quad rk(A|B)=3 \quad \forall k$

ma una retta e un piano sono disgiunti solo se sono paralleli

$\forall k: r // \pi_k$.

$$r_k: \begin{cases} x+z=0 \\ kx+y+(k+2)z=0 \end{cases}$$

$\pi: 2x-y=2$

Geometria euclidea.

Geometria affine su $\mathbb{R}$ + prodotto scalare d. p. fra vettori.

↓

norma di un vettore

↓

distanza fra punti.

Sia $AG(n, \mathbb{K})$ una geometria affine

Si dice distanza su $AG(n, \mathbb{K})$ una funzione

$$d: A \times A \to \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti 3 proprietà:

1) $\forall P, Q \in A$: $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2) $\forall P, Q \in A$: $d(P,Q) = d(Q,P)$
3) $\forall P, Q, R \in A$: $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ (disuguaglianza triangolare).

1) Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e $V_n^\circ(\mathbb{K})$ é uno spazio vettoriale Euclideo poniamo

$$d_E(P,Q) := \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ}\cdot\vec{PQ}}$$

DISTANZA EUCLIDEA.

1) vale perché $\|\vec{PQ}\| \geq 0$ e $\|\vec{PQ}\|=0$ $\iff P=Q$

2) vale perché $\|\vec{PQ}\| = \|\vec{QP}\|$

3) vale per la dis. triangolare delle norme $\|\vec{PQ}\| + \|\vec{QR}\| \geq \|\vec{PR}\|$.

2) Se $A=\mathbb{R}^n \Rightarrow$ $P=(p_1 \dots p_n)$, $Q=(q_1 \dots q_n)$

$$d_\infty(P,Q) = \max\{|p_i-q_i| \mid i=1\dots n\}.$$

3) Se $A=\mathbb{R}^n$ $\quad d_T(P,Q) = \sum_{i=1}^{n} |p_i-q_i|$

4) Se $A=\mathbb{K}^n$ $\quad d_H(P,Q) = |\{i \mid p_i \neq q_i\}|$

DISTANZA DI HAMMING.

poniamo

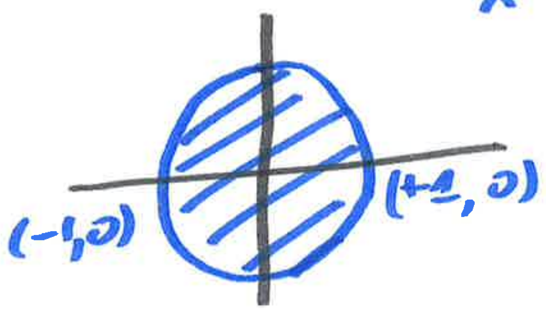
$$B_0^X(1) := \{ P \in AG(2,\mathbb{R}) \mid d_X(P,O) \leq 1 \}.$$

1) DISTANZA EUCLIDEA IN UN RIFERIMENTO CON BASE ORTONORMALE PER CUI IL PROD. SCALARE FRA I VETTORI È DATO DAL PROD SCALARE STD. FRA LE COMPONENTI.

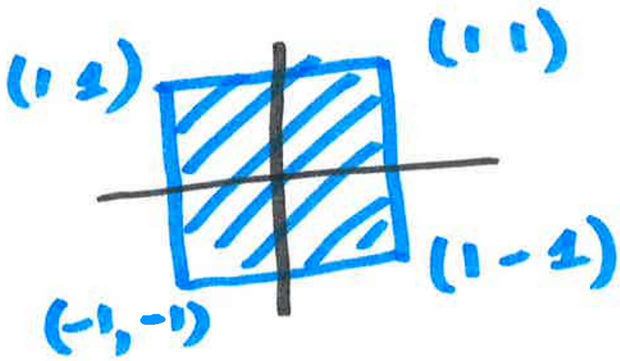
$$d((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$x^2+y^2 \leq 1$

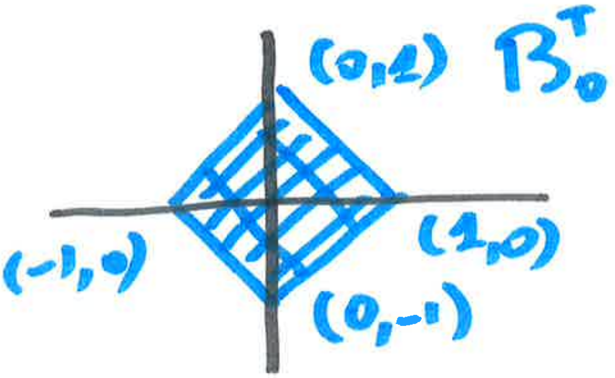
$B_0^E(1)$



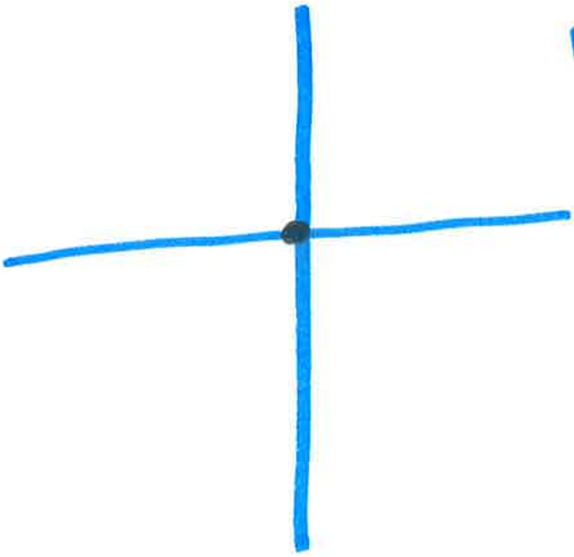
2) $B_0^\infty(1) = \{(x,y) \mid \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}.$



3) $B_0^T(1) = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}.$



4) $B_0^H(1) = \{(x,y) \mid x=0\} \cup \{(x,y) \mid y=0\}$.



$B_0^H(1)$

unione di 2 rette!!

NOI LAVOREREMO IN SPAZI <u>EUCLIDEI</u>

$d_E := d$ indicherò la distanza data.

<u>Def</u> In uno spazio euclideo $EG(n, \mathbb{R})$ si dice <u>riferimento euclideo</u> un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ ove $\mathcal{B}$ è

una base ortonormale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

OSS: Siano P, Q due punti di $EG(n,\mathbb{R})$ con coordinate $(p_1 \dots p_n)$ e $(q_1 \dots q_n)$ rispetto un riferimento euclideo.

$$\Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$$

DIM: $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1 \dots q_n - p_n)$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}$ rispetto prod. scalare std.

$$\Rightarrow d(P,Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}} = \sqrt{\sum(p_i - q_i)^2}$$

$\square$

Def: Siano $\Pi = [P; U]$ e $\Sigma = [Q; W]$ due sottospazi di $EG(n,\mathbb{R})$

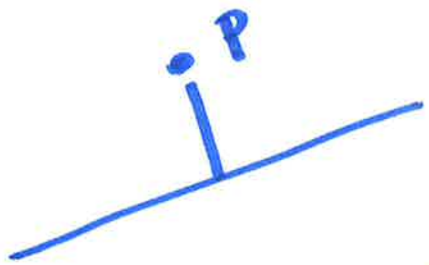
$\Rightarrow$ diciamo che $\Pi \perp \Sigma$ (Π ortogonale a Σ) se

$U \subseteq W^\perp$ oppure $U^\perp \subseteq W$

OSS: $U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp$

$U^\perp \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U$

"essere ortogonale significa che il sottospazio di traslazione di uno dei due è contenuto nell'ortogonale del sottospazio di traslazione dell'altro."

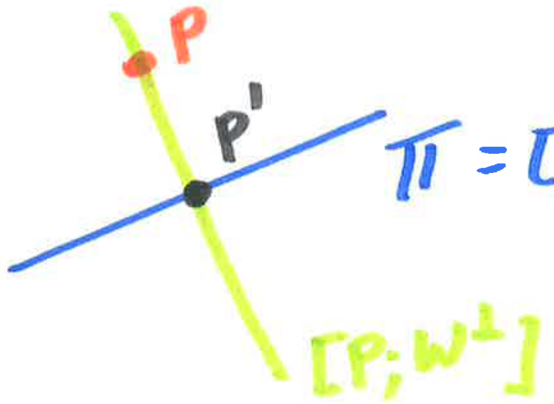


Def: Sia $P \in AEG(n, \mathbb{R})$; Π un sottospazio

$\Pi = [Q; W]$

Si dice proiezione ortogonale di P su Π il punto

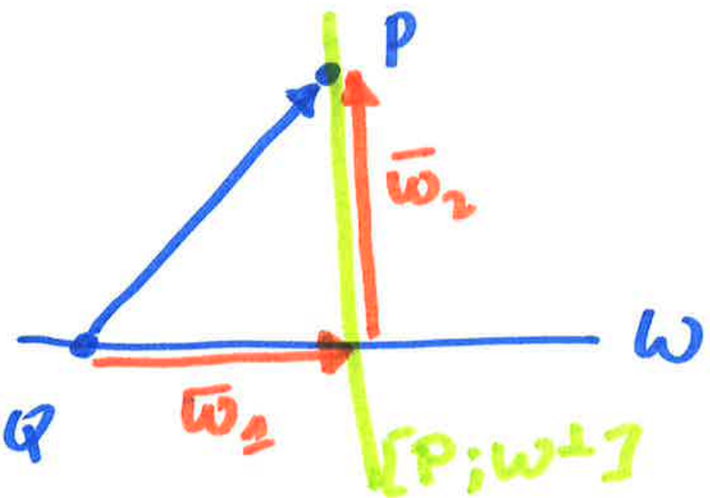
$P' = [Q; W] \cap [P; W^\perp]$



OSS: perché la definizione funzioni servono 2 proprietà:

1) $[Q;W] \cap [P;W^\perp] \neq \emptyset$

2) $|[Q;W] \cap [P;W^\perp]| = 1$



OSS: $W \oplus W^\perp = V_n^\circ(\mathbb{R})$

in particolare $\overrightarrow{QP} \in W + W^\perp$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{QP}$ si scrive come $\overline{w}_1 + \overline{w}_2$ con

$\overline{w}_1 \in W$, $\overline{w}_2 \in W^\perp$

OSSERVIAMO CHE.

$Q+\overline{w}_1 = R$ con R in Π

perché $\Pi=[Q;W]$

$P-\overline{w}_2 = R'$ con $R' \in [P;W^\perp]$

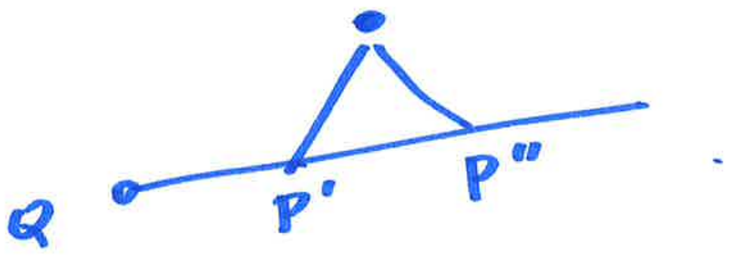
$P = Q+\overline{w}_1+\overline{w}_2 \Rightarrow \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{R'P} =$

$= \overrightarrow{QP} \Rightarrow$ deve essere

$R = R'$

$\Rightarrow \exists R \in [P;W^\perp] \cap [Q;W]$

che sia unico segue dal fatto che ogni vettore in una somma diretta si scrive in modo unico come somma.



per $X \subseteq EG(n,\mathbb{R})$ e π sottospazio di $EG(n,\mathbb{R})$ chiamiamo proiezione ortogonale di X su π l'immagine della proiezione ort. di tutti i punti di X.

<u>OSS:</u> Se X è un sottospazio di $EG(n,\mathbb{R}) \Rightarrow$ la sua proiezione ort. è un sottospazio di π.

Teorema: Sia $P \in EG(n,\mathbb{R})$ e π un sottospazio.
Allora la proiezione ortogonale di P su π, diciamo P' è il punto di π a distanza minima da P.

DIM:

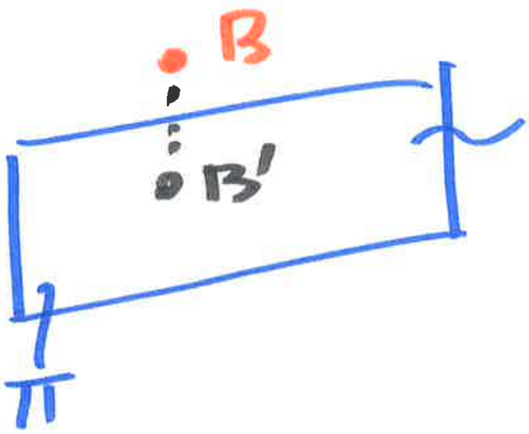
Sia P dato; P' la sua proiezione ortogonale ed R un punto di π.

$$\Rightarrow d(P,R)^2 = \|\overrightarrow{PR}\|^2 =$$
$$= \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}) \cdot (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}) =$$
$$= \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R} \cdot \overrightarrow{P'R} + \cancel{2\,\underbrace{\overrightarrow{PP'}}_{\in W^\perp} \cdot \underbrace{\overrightarrow{P'R}}_{\in W}} =$$
$$= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'R}\|^2$$

e visto che le norme sono ≥ 0 il minimo si ottiene se $\|\overrightarrow{P'R}\| = 0$ cioè $R = P'$.

□

Minimi quadrati



sottospazio vettoriale di vettori B' tali che $AX = B'$ compatibile.

B' = proiez. ortogonale di B su Π

= punto di Π più vicino a B.

DISTANZA FRA PUNTI

↓

DISTANZA PUNTO/SOTTOSPAZIO

P punto

Σ sottospazio

$$d(P;\Sigma) = \min\{d(P,X) \mid X \in \Sigma\}$$

$= d(P;P')$ ove P'

proiezione ortogonale di P su Σ.

DISTANZA FRA SOTTOSPAZI

Π, Σ

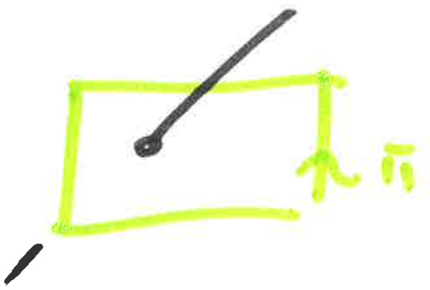
$$d(\Pi,\Sigma) = \min\{d(P,\Sigma) \mid P\in\Pi\} = \min\{d(P,Q) \mid P\in\Pi,\ Q\in\Sigma\}. \quad *$$

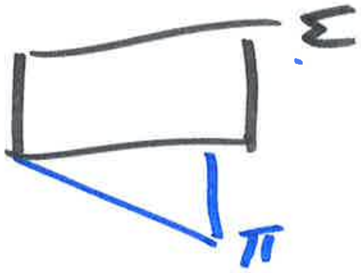
DISTANZA PUNTO/SOTTOSPAZIO

$$d(P,\Sigma)=0 \iff P\in\Sigma.$$

* Funziona bene $\iff \Pi\cap\Sigma=\phi$.

se $\Pi\cap\Sigma\neq\phi \Rightarrow$ * direbbe
$d(\Pi,\Sigma)=0$ anche se $\Pi\neq\Sigma$.





La distanza euclidea fra sottospazi si considera solamente se sono disgiunti (o uno contenuto nell'altro e dunque paralleli e a distanza $=0$).

Calcolare la distanza di un punto da un iperpiano (punto/retta nel piano e punto/piano nello spazio).

Sia $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ l'equazione di un iperpiano in $EG(n, \mathbb{R})$. $\Pi = [Q; W]$

$\Rightarrow$ W é il sott. di $V_n^0(\mathbb{R})$ i cui vettori hanno come componenti le soluzioni di

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$

cioé hanno componenti in $(a_1 \dots a_n)^\perp$

passando in coordinate

$$W = \{(a_1 \dots a_n)\}^{\perp}$$

$$W^{\perp} = \{(a_1 \dots a_n)\}^{\perp\perp} =$$

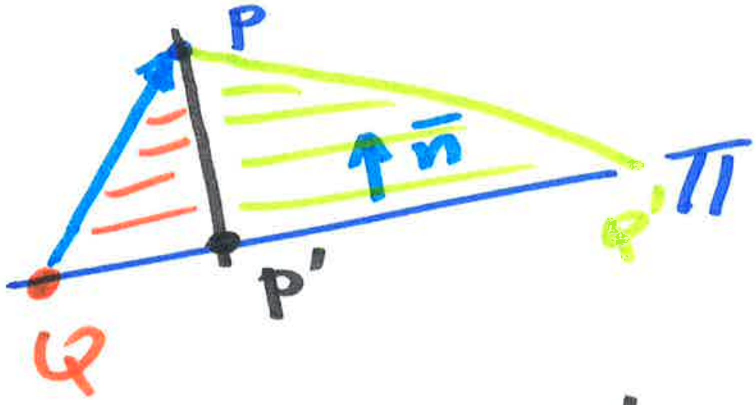
$$= \mathcal{L}((a_1 \dots a_n)).$$

$\downarrow$

DIREZIONE NORMALE (ortogonale) a W.

ABBIAMO $P = (p_1 \dots p_n)$

e un iperpiano $\pi = [Q; W]$



ci serve $\|\overrightarrow{PP'}\|$ con P' proiez. ortogonale su π di P.

$$\overrightarrow{P'P} = \pm \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \cdot \vec{n}$$

$P = (p_1 \dots p_n)$

$\pi : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$

$Q = (q_1 \dots q_n) \in \pi \Rightarrow$

$a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_n q_n + b = 0$

$\Rightarrow a_1 q_1 + \dots + a_n q_n = -b.$

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} = \frac{(p_1 - q_1 \dots p_n - q_n) \cdot (a_1 \dots a_n)}{(a_1 \dots a_n) \cdot (a_1 \dots a_n)} =$$

$$= \frac{a_1 p_1 + \dots + a_n p_n - (a_1 q_1 + \dots + a_n q_n)}{a_1^2 + \dots + a_n^2} =$$

$$= \frac{a_1 p_1 + \dots a_n p_n + b}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

$$\|\alpha \bar{n}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{n}\| = \frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b|}{\|n\|^2} \cdot \|\bar{n}\|$$

$=$

$$\frac{|a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \quad \square$$

CASO PARTICOLARE

$n = 2$ $\qquad P = (x_0 \; y_0)$

$\pi : ax + by + c = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$n = 3$ $\qquad P = (x_0 \; y_0 \; z_0)$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

la distanza di P da π è il rapporto fra il modulo del valore che si ottiene sostituendo le coordinate di P nell'equazione di π

e la radice quadrata della somma dei quadrati dei coeff. delle indeterminate nell'eq. di π.