Geometria Affine.

Spazio affine → punti.

- dati 2 punti possiamo costruire il vettore che li congiunge.
- dato un punto P ed un vettore $\bar{v}$ possiamo trovare il punto $P+\bar{v}$ traslato di P secondo il vettore $\bar{v}$.

Sottospazio affine → sottostruttura di uno spazio affine.

→ insieme di punti S tale che $\forall\, P, Q, R \in S$ si abbia che $P + \alpha\overrightarrow{QR} \in S$. $\underline{\alpha \in \mathbb{K}}$

insieme di punti "chiuso" rispetto le traslazioni mediante i vettori che si possono costruire a partire da essi e i loro multipli.

Sottospazio lineare.

$[P; W]$ ove $P \in \mathcal{A}$ punto

$W \subseteq V_n(\mathbb{K})$.

$$[P; W] = \{ P + \overline{w} \mid \overline{w} \in W \}.$$

Teorema: Sottospazi Affini e Sottospazi lineari coincidono.

DIM: Siano $A, B, C \in [P; W]$

allora $A + \overrightarrow{BC} \in [P; W]$

infatti se $A, B, C \in [P; W]$

$\Rightarrow \exists\, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in W$ tali che

$A = P + \overline{a} \qquad B = P + \overline{b}$

$C = P + \overline{c}$ ma allora il vettore

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = -\overline{b} + \overline{c} \in W$$

$$\Rightarrow A + \overrightarrow{BC} = P + (\overline{a} + \overrightarrow{BC}) = P + (\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}) \in [P; W]$$

ogni sottospazio lineare è
un sottospazio affine.

Viceversa: sia S un sottospazio affine e $P \in S$.

Allora poniamo $W = \{\alpha \overrightarrow{PQ} \mid Q \in S, \alpha \in \mathbb{K}\}$.

ed osserviamo che

$$[P; W] = S$$

infatti $\forall\, Q \in S$, $\overrightarrow{PQ} \in W$

e quindi $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in [P; W]$.

~~Inoltre W è un sottospazio vettoriale di V infatti se~~
~~$\overrightarrow{PQ} \in W$, $\overrightarrow{PR} \in W \Rightarrow \overrightarrow{QP} \in W$~~
~~PQ in quanto~~
~~$Q \in S$, $P \in S \Rightarrow \overrightarrow{QP}$ [illegible] $\in S$~~
~~è un vettore~~
~~e dunque e $P + \overrightarrow{QP} \in S$.~~
~~perché S chiuso rispetto~~
~~traslazioni $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}$~~

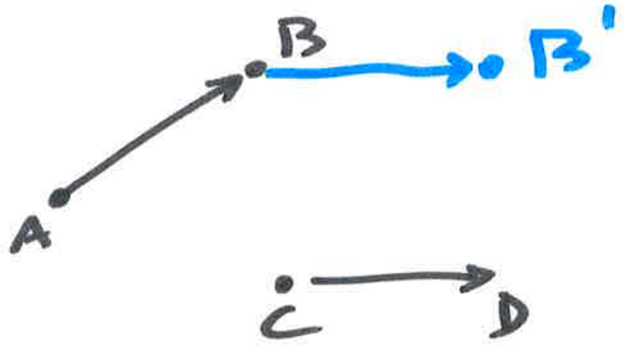
S coincide con tutti i possibili traslati di P mediante vettori A, B che congiungono due punti di S stesso o loro multipli.

Pongo $W = \{\alpha \vec{AB} \mid A, B \in S, \ \alpha \in \mathbb{K}\}$.

ed osservo che $W \leq V_n(\mathbb{K})$

infatti se $\vec{AB} \in W$ e $\vec{CD} \in W$

$\Rightarrow$



osserviamo che $B + \vec{CD} = B' \in S$

$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{BB'} = \vec{AB'} \in W$

e $\vec{AB'} = \vec{AB} + \vec{CD}$.

$\Rightarrow$ W è chiuso rispetto la somma di vettori.

Inoltre $\alpha \vec{AB} \in W \ \forall \vec{AB} \in W$

$\Rightarrow$ W è sottospazio.

$S \subseteq [P;W] \quad \forall P \in S$

e $[P;W] \subseteq S$ quindi $S = [P;W]$.

<u>N.B.</u>

Serve nella definizione che S contenga $\forall$ ~~vettore $\alpha \in \mathbb{R}$~~ traslato di P mediante vettori $\alpha\vec{PQ}$ con $P, Q \in S$ $\alpha \in \mathbb{K}$ perché altrimenti potremmo dimostrare solo che W è un sottogruppo di $(V_n, +)$ ma non che è un sottospazio.

(esempio $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$).

<u>Lavoreremo con sottospazi lineari</u>

Sia $[P;W] \subseteq AG(n,\mathbb{K})$

Si dice dimensione di $[P;W]$ la dimensione di W.

In particolare W è detto sottospazio di traslazione di $[P;W]$ se $n \geq 1$.

per $n=1$ W è detto direzione

$n=2$ W è detto giacitura.

Un sottospazio lineare di dim.

0	punto
1	retta
2	piano
3	solido
$n-1$	iperpiano.

Lemma: Sia $Q \in [P;W] \Rightarrow [P;W]=[Q;W]$

DIM: Sia $R \in [P;W] \Rightarrow$
$\exists \bar{w} \in W$ tale che $R = P + \bar{w}$

inoltre $Q \in [P;W]$ $\exists \bar{q} \in W$ tale che $Q = P + \bar{q}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = -\bar{q} + \bar{w} \in W$$

$$\Rightarrow Q + \overrightarrow{QR} = R \in [Q;W] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [Q;W] \subseteq [P;W]$$

Scambiando i ruoli di P e Q si vede che vale anche l'inclusione inversa

$$[P;W] \subseteq [Q;W]$$

e dunque i 2 sottospazi lineari coincidono.

$\square$

Def: Due sottospazi $[P;W]$ e $[Q;U]$ sono detti paralleli se $W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$.

$\square$

passiamo a lavorare in coordinate.

Sia $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ un riferimento affine.

$\downarrow$

O: punto fissato

$\mathcal{B}$: base di $V_n(\mathbb{K})$.

Abbiamo allora una funzione

$$\vartheta_\Gamma : A \to \mathbb{K}^n$$

associa ad ogni $P \in A$ le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$\to$ BIIEZIONE CHE INDUCE COORDINATE.

$\downarrow$

ogni punto é rappresentato da una n-upla di elementi di $\mathbb{K}$.

$$\left.\begin{aligned} P &= (p_1 \dots p_n) \\ Q &= (q_1 \dots q_n) \end{aligned}\right] \text{ cordinate} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \underbrace{(q_1 - p_1 \dots q_n - p_n)}_{\text{componenti}}$$

in particolare $P+\bar{v}$ se $P=(p_1 \text{—} p_n)$

$\bar{v}=(v_1 \text{—} v_n)$

è il punto di coordinate $(p_1+v_1, \dots p_n+v_n)$.

Vogliamo descrivere i sottospazi lineari.

Fissiamo un riferimento affine

$P=(p_1 \text{—} p_n)$

$W \leq \mathbb{K}^n$ generato dai vettori

$\bar{v}_1=(v_{11} \dots v_{1n})$

$\vdots$

$\bar{v}_k=(v_{k1} \dots v_{kn})$.

$\Rightarrow$ i punti di $[P;W]$

avranno tutti componenti

$$P+\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{v}_i \qquad a_i \in \mathbb{K}.$$

$$\begin{pmatrix} p_1 + \alpha_1 v_{11} + \dots + \alpha_k v_{k1}, \\ p_2 + \alpha_1 v_{12} + \dots + \alpha_k v_{k2}, \\ \vdots \\ p_n + \alpha_1 v_{1n} + \dots + \alpha_k v_{kn} \end{pmatrix}$$

punti di $[P; W]$ in forma parametrica.

$P = (p_1 \dots p_n)$

$\bar{v} = (\ell_1 \dots \ell_n)$

$\Rightarrow$ le coordinate dei punti $X = (x_1 \text{———} x_n)$ appartenenti alla retta $r_0 = [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$ sono del tipo

$(x_1 \text{———} x_n) = (p_1 + \alpha \ell_1 \dots p_n + \alpha \ell_n) \quad \alpha \in \mathbb{K}$

$n=2$

$$(x,y)=(x_0+\alpha l,\ y_0+\alpha m)$$

ove $P=(x_0,y_0)$ $\quad \bar{v}=(l,m)$.

<u>OSS</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare in n incognite compatibile.

$\Rightarrow$ noi sappiamo che le sol. di questo sistema lineare si scrivono come

$$X=X_0+Z \quad \text{con } Z\in \operatorname{Ker}(A)$$

cioè con Z soluzione di $AX=\underline{0}$

ma noi possiamo reinterpretare questo sistema in $AG(n,\mathbb{K})$ fissato un rif. affine Γ come descrivente il sottospazio lineare di origine il punto di coordinate X_0 e sott. di traslazione dato dai vettori che hanno componenti in $\ker(A)$.

$$[X_0 ; \ker(A)]$$

infatti sono "tutti i traslati di X_0 "mediante vettori di $\ker(A)$".

Interpretazione geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

$$\begin{cases} 2x+y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

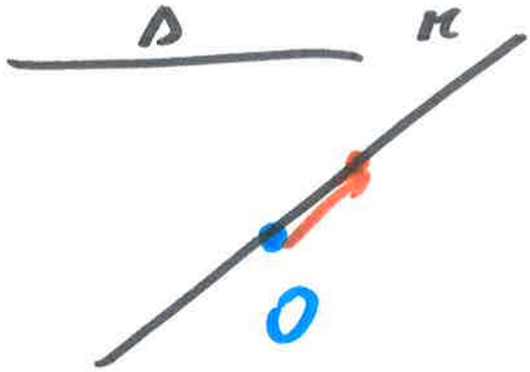
$$S = \{(0\ 0\ 1) + \alpha(1\ -2\ 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(0\ 0\ 1) ; \mathcal{L}((1\ -2\ 0))]$$

si tratta di una retta in $AG(3, \mathbb{R})$.

N.B non passa per $(0 0 0)$!!

$n=2$



$$r = [(0\ 0);\ \mathcal{L}((\ell, m))] =$$

$$= \{\alpha(\ell, m) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((\ell, m)).$$

coincidono come insiemi di n-uple ma gli elementi di r sono punti e non vettori

$$s = [(1\ 0);\ \mathcal{L}((\ell', m'))] \Rightarrow$$

s corrisponde all'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo $\rightarrow$ sottospazio lineare/affine.

DATO $AX=B$ compatibile

S = insieme delle soluzioni è sottospazio affine.

Viceversa dato S sottospazio affine $\exists$ un sistema lineare in n incognite le cui soluzioni sono le coordinate dei punti di S.

$n=2$ per le rette nel piano.

$$r = [\underbrace{(x_0, y_0)}_{P} ; \mathcal{L}((\underbrace{l, m}_{\bar{v}}))]$$

$$(x,y) \in r \iff \overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}(\bar{v})$$

$$\iff (x_0 - x, y_0 - y) = a(l, m)$$

$a \in \mathbb{K}$

$$\iff rk \begin{pmatrix} x_0 - x & y_0 - y \\ l & m \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_0-x & y_0-y \\ \ell & m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m(x_0-x) = \ell(y_0-y)$$

cioè
$$\boxed{\frac{(x_0-x)}{\ell} = \frac{y_0-y}{m}}$$

più in generale per le rette.

$P = (x_1' \; x_2' \dots x_n')$

$\bar{v} = (v_1 \; v_2 \dots v_n) \neq \underline{0}$

$X = (x_1 \dots \quad x_n) \in [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}(\bar{v}) \Leftrightarrow$$

$$rk\begin{pmatrix} x_1-x_1' & x_2-x_2' & \dots & x_n-x_n' \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = 1$$

$n=3$

$$rk\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ \ell & m & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_P & y-y_P \\ \ell & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_P & z-z_P \\ \ell & n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-y_P & z-z_P \\ m & n \end{vmatrix} = 0$$

$$m(x-x_P) = (y-y_P)\ell$$
$$n(x-x_P) = (z-z_P)\ell$$
$$n(y-y_P) = m(z-z_P)$$

$$\boxed{\frac{(x-x_P)}{\ell} = \frac{(y-y_P)}{m} = \frac{z-z_P}{n}}$$

equazioni della retta nello sp. per il punto (x_P, y_P, z_P) con direzione generata da $\bar{v} = (\ell, m, n)$.

N.B. 1) solo 2 delle eq. sono indip.
2) ammettiamo anche che

alcuni dei coeff. (ℓ, m, n) siano 0 nella formula a patto di leggere

$$\frac{x-x_P}{0} = \frac{y-y_P}{1}$$

come ~~$y=y_P$~~ ovvero

$$x = x_P$$

$$1 \cdot (x-x_P) = 0 \cdot (y-y_P)$$

NON È UNA DIVISIONE PER ZERO!

più in generale ancora:

Sia $P = (p_1 \dots p_n)$.

$W = \mathcal{L}((v_{11} \dots v_{1n}) \dots (v_{k1} \dots v_{kn}))$.

$[P; W]$ $\quad X = (x_1 \dots x_n)$

$X \in [P; W] \iff \overrightarrow{PX} \in W \iff$

$$(x_1 - p_1 \; \dots \; x_n - p_n) \in \mathcal{L}((v_{11} \dots) \dots)$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rk} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & \dots & x_n - p_n \\ v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix}$$

In generale dovete imporre che tutti i minori $k \times k$ della prima matrice abbiano $\det = 0$, ammesso che la seconda matrice abbia rango k (cioè i $\bar{v}_i$ siano una base di W).

<u>oss</u>: per il teorema degli orlati se $\dim W = k$ voi otterrete $n-k$ equazioni indipendenti.

$$
\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1-p_1 & x_2-p_2 & \dots & x_n-p_n \\ v_{11} & \dots & & v_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & & v_{kn} \end{bmatrix} = k
$$

$\iff$ tutti gli orlati di un minore $(k \times k)$ con $\det \neq 0$ hanno $\det = 0$.

gli orlati possibili si ottengono tutti aggiungendo una colonna che non appartiene alle k colonne del minore $\Rightarrow$

$n-k$ possibilità.

Un sottospazio lineare di dimensione k in $AG(n, \mathbb{K})$ é descritto da un sistema lineare di $n-k$ equazioni indipendenti.

↓

N.B questo sistema ha ∞^k soluzioni.

"∞^k significa

- dim. spazio vett. soluzioni sist. omogeneo associato
- numero parametri da cui dipendono le soluzioni
- dim spazio affine delle soluzioni."

Def: In $AG(n, \mathbb{K})$ sia $T \subseteq A$ un insieme di punti. Si dice sottospazio affine generato da T $\langle T \rangle$ il più piccolo sottospazio affine che contiene T.

Se $T = \{P_1 \dots P_n \dots\}$.

$$\Rightarrow \langle T \rangle = [P_1 ; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1P_2} \dots \overrightarrow{PP_n} \dots)]$$

in quanto T contiene P_1 e il sottospazio di traslazione associato a T deve contenere tutti i vettori $\overrightarrow{P_1P_i}$ con $i \neq 1$.

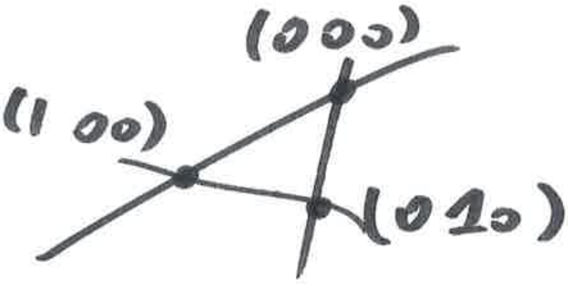
DICIAMO CHE UN INSIEME DI PUNTI T È GEOMETRICAMENTE INDIPENDENTE SE $\forall P \in T$ $\langle T \setminus \{P\} \rangle \neq \langle T \rangle$.

non sono indip.

$r = \langle (0\ 0), (1\ 1), (2\ 2) \rangle$

r di equazione $x = y$

$r = \langle (0\ 0), (1\ 1) \rangle$



In particolare $\underline{\underline{t}}$ punti sono geometricamente indipendenti $\Leftrightarrow$ lo spazio affine che generano ha dimensione $\underline{\underline{t-1}}$.

OSS: t punti al più generano un sottospazio affine di dim $t-1$, infatti

$P_1 \dots P_t$ generano il sottospazio

$$[P_1 ; \mathcal{L}(\overrightarrow{P_1 P_2} \dots \overrightarrow{P_1 P_t})]$$
$$\overset{\shortparallel}{W}$$

e W è generato da $t-1$ vettori.

quindi $\dim W \le t-1$ ed è $t-1 \iff$ i vettori sono indip.

e nel caso specifico si verifica direttamente che posto

$T = \{P_1 \dots P_t\}$ $\langle T \setminus \{P_i\} \rangle \neq \langle T \rangle$

OSS: Siano $U \le W \Rightarrow$

$$[P; U] \subseteq [P; W]$$

infatti $\forall X \in [P; U] \; \exists \bar{u} \in U : \overrightarrow{PX} \in U \subseteq W$

$\Rightarrow \overrightarrow{PX} \in W \Rightarrow X \in [P; W]$ $\square$

Siano $P = (x_1' \dots x_n')$

$Q = (x_1'' \dots x_n'')$

due punti.

OSSERVIAMO CHE SE $P \neq Q$

$\Rightarrow r_0 = [P; \mathcal{L}(x_1''-x_1' \dots x_n''-x_n')]$

è una retta e i 2 punti sono indipendenti.

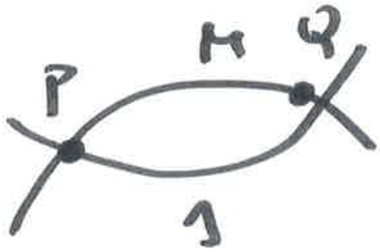
l'equazione della retta è data da

$$rk \begin{pmatrix} x_1-x_1' & x_2-x_2' & \dots & x_n-x_n' \\ x_1''-x_1' & x_2''-x_2' & \dots & x_n''-x_n' \end{pmatrix} = 1$$

$$\left[\frac{x_1-x_1'}{x_1''-x_1'} = \frac{x_2-x_2'}{x_2''-x_2'} = \dots = \frac{x_n-x_n'}{x_n''-x_n'} \right]$$

equazioni della retta per 2 punti.

per 2 punti distinti passa una ed una sola retta.



$\overrightarrow{PQ}$.

vogliamo studiare le possibili posizioni reciproche di 2 rette nel piano $AG(2,\mathbb{K})$ (vedremo che valgono gli assiomi di Euclide).

$$r: ax + by + c = 0$$
$$s: a'x + b'y + c' = 0$$

con $(a,b) \neq (0\,0) \neq (a',b')$.

mettiamo r ed s a sistema.

$$AX = B$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{array}\right]$$

$$\quad A \qquad\qquad B$$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$	sol.	
(1)	1	1	∞^1	$r=s$
(2)	1	2	0	
(3)	2	2	~~∞~~ $\underline{1}$	$r\cap s=\{$

(1) le due equazioni sono equivalenti $\Rightarrow r=s$.

(3) il sistema ha esattamente 1 ed 1 sola soluzione $\Rightarrow r\cap s=\{P\}$

(2) $r\cap s=\phi$ ma le direzione di r é data dalle soluzioni dell'eq. omogenea $ax+by=0$

mentre la direzione di s
è data dalle soluzioni
dell'eq. omogenea $a'x+b'y=0$

per ipotesi il sistema lineare

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=1$$

$\Rightarrow$ gli insiemi delle soluzioni
di $ax+by=0$ e di
$a'x+b'y=0$

coincidono.

$\Rightarrow$ le rette r ed s hanno
la stessa direzione

$$\mathcal{L}((-b,a))=\mathcal{L}((-b',a'))$$

$\Rightarrow r \parallel s$. $\square$

Nel piano 2 rette disgiunte
sono parallele (e distinte).

più in generale:

1) Se un sottospazio affine è descritto da un sistema lineare $AX = B \Rightarrow$ il suo sottospazio di traslazione consta dei vettori soluzione di $AX = \underline{0}$.

In particolare se $AX = B$ e $A'X = B'$ descrivono 2 sottospazi affini Π, Σ abbiamo $\Pi \parallel \Sigma \Leftrightarrow$

~~AX=0 ha~~

$$\ker(A) \subseteq \ker(A')$$

oppure

$$\ker(A') \subseteq \ker(A)$$

cioè
$$rk\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \max(rk(A), rk(A'))$$

In particolare se $rk(A) = rk(A')$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = rk(A) = rk(A').$$

2) Siano $\pi // \Sigma \Rightarrow$ vale

$\pi \subseteq \Sigma$ oppure $\Sigma \subseteq \pi$

oppure $\pi \cap \Sigma = \phi$.

• Siano $\pi = [P; U]$

$\Sigma = [Q; W]$

supponiamo $U \leq W$

se $\exists R \in \pi \cap \Sigma \Rightarrow \pi = [R; U]$

$\Sigma = [R; W]$ e $U \leq W$

$\Rightarrow \forall x \in \pi$ si ha $x \in \Sigma \Rightarrow \pi \subseteq \Sigma$

similmente se $W \subseteq U$. $\Rightarrow$

$\Sigma \subseteq \pi$.

$\square$

$\boxed{n=3}$ posizioni reciproche di 2 piani.

π: $ax+by+cz+d=0$

π': $a'x+b'y+c'z+d'=0$

con $(a,b,c) \neq (000) \neq (a'b'c')$.

$A|B$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{array}\right]$$

$rk(A) \geq 1$

	$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
(1)	1	1	∞^2	$\pi = \pi'$
(2)	1	2	0	$\pi // \sigma$; $\pi \neq \sigma$.
(3)	2	2	∞^1	$\pi \cap \pi' = r$

Due piani non si possono intersecare solo in un punto! (in $AG(3, \mathbb{K})$).

(1) i 2 piani coincidono (le eq. hanno le medesime soluz.).

(3) i 2 piani si intersecano in un sottospazio affine di dim = 1 $\Rightarrow$ retta (è descritta da un sist. lineare $\Rightarrow$ è sott. affine).

(2) I sistemi omogenei sono equivalenti $\Rightarrow$ π e σ hanno la stessa giacitura $\Rightarrow$ $\pi // \sigma$

$\pi \cap \sigma = \emptyset$ $\Rightarrow$ paralleli e distinti

In generale vale la stessa cosa in dim $= n$ per gli iperpiani
$\to$ o coincidono, o sono paralleli e disgiunti; o si intersecano in un sottospazio di dim $= n-2$.

$n=3$ posizioni reciproche di un piano e una retta.

$$\pi : ax+by+cz+d=0$$

$$(a,b,c) \neq (0\,0\,0).$$

$$r : \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

$\downarrow$

rette = soluzioni di un sist. lineare con ∞^1 sol.

$$rk\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \end{array}\right]$$

	$rk(A)$	$rk(A\mid B)$		
	2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$
(*)	2	3	0	$r \parallel \pi$; $r \cap \pi = \emptyset$.
	3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$.

(*) osserviamo che ogni soluzione del sist. omogeneo associato alla retta è soluzione del sist. omogeneo associato al piano.

$\Rightarrow r \parallel \pi$; $r \cap \pi = \emptyset$

- Una retta che interseca un piano in almeno 2 punti è contenuta in esso.

$n=3$ posizione reciproca di 2 rette.

$$r\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$$s\begin{cases} a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \\ a''' & b''' & c''' & -d''' \end{array}\right]$$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
2	2	∞^1	$r = s$
2	3	0	$r // s$, $r \cap s = \emptyset$
3	3	1	$r \cap s = \{P\}$.
3	4	0	$r \cap s = \emptyset$ ma $r \not\parallel s$.

↓

r e s sono sghembe.

<u>Def</u>: In $AG(n, \mathbb{K})$ con $n \geq 3$ due rette sono dette <u>complanari</u> se $\exists$ un piano π che le contiene entrambe; sono dette <u>sghembe</u> se non sono complanari.

<u>Teorema</u>: Due rette parallele o incidenti sono complanari; due rette non parallele e disgiunte

sono sghembe.
Inoltre date due rette sghembe r, s esistono 2 piani paralleli e disgiunti π, π' tali che $r \subseteq \pi$; $s \subseteq \pi'$.

<u>DIM</u>: Siano
$$r = [P; U_1]$$
$$s = [Q; W_1]$$
due rette.
Se $r // s \Rightarrow U_1 = W_1$ e
$$r, s \subseteq [P; W_1 + \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$$
piano.

$$r \cap s = \{T\} \Rightarrow r = [T; U_1]$$
$$s = [T; W_1]$$

$$r, s \subseteq [T; U_1 + W_1]$$

Se r ed s fossero complanari e disgiunte $\Rightarrow r // s$

per la dimostrazione che
nel piano 2 rette disgiunte
sono parallele.
Quindi se $r \cap s = \emptyset$ e $r \not\parallel s$
non può esistere un piano
che le contenga entrambe
$\Rightarrow$ r ed s sono sghembe. $\square$