Teorema della base spettrale

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $A = {}^tA$.

OSS: Sia P una matrice invertibile

$\Rightarrow$ P è ortogonale cioè

${}^TP = P^{-1}$

se e solamente se le righe (colonne) di P formano un sistema ortonormale di vettori per $\mathbb{R}^n$ rispetto il prod. scalare standard.

${}^TP \cdot P$ = matrice S che ha come entrata (i,j) il prodotto della i-esima riga di ${}^TP$

per la j-esima colonna di P.

Ma la i-esima riga di ${}^{T}P$ è proprio la i-esima colonna di P $\Rightarrow$ $s_{ij} = C_i \cdot C_j$

è il prod. scalare std. della i-esima e della j-esima colonna di P.

Se ${}^{T}P = P^{-1} \Rightarrow s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ le colonne di P sono un sistema ortonormale

ragionando sul fatto che

$${}^{T}P P = I = P\,{}^{T}P \quad \text{perché}$$

in questo caso $P\,{}^{T}P = PP^{-1} = I$

si vede che anche le ~~col~~ righe di P devono essere un sistema ortonormale.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ortonormalizziamo le colonne.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\,(1\,1\,1)(1\,0\,1) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cancel{(1\,1\,1)}$$

$$\bar{e}_3' = (1\,1\,1) - \cancelto{0}{\frac{(1\,1\,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$- \frac{(1\,1\,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\;0\;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (1\,1\,1) - (1\,0\,1) = (0\,1\,0)$$

ortonormalizzando le righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ & \text{etc.} & \text{etc.} \\ & & \end{bmatrix}$$

$$e_2' = (0\,0\,1) - \frac{\sqrt{3}}{3}(0\,0\,1)\cdot\underbrace{(1\,1\,1)}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} =$$

$$= (0\,0\,1) - \frac{1}{3}(1\,1\,1) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\;-\frac{1}{3}\;\frac{2}{3}\right) \qquad \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

normalizzando

$$\bar{e}_2'' = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{3}\;-\frac{1}{3}\;\frac{2}{3}\right)$$

$$\bar{e}_3' = (-1\,1\,1) - \text{etc. etc.}$$

OSS 2: Se A è ortog. diag. $\Rightarrow A = {}^TA$

infatti ${}^TPAP = D$ con ${}^TP = P^{-1}$

segue ${}^T({}^TPAP) = {}^TD = D$

$$\begin{gathered} {}^T({}^TPAP) \\ \parallel \\ {}^TP\,{}^TA\,P \end{gathered}$$

e moltiplicando a dx e sx rispettivamente per $P^{-1} = P$ e per P si ha ${}^TA = A$.

OSS 3: Siano P, Q due matrici ortogonali $\Rightarrow {}^T(PQ)(PQ) =$

$= {}^TQ\,{}^TP\,P\,Q = {}^TQ\,P^{-1}P\,Q = {}^TQ\,Q =$

$= Q^{-1}Q = I.$

In particolare il prodotto di due matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

[$\Rightarrow$ segue che l'insieme delle matrici ortogonali è un gruppo]

DIM CHE ${}^T\!A = A \Rightarrow A$ ortogonalmente diagonalizzabile.

per induzione su n = ordine di A.

- $n = 1 \Rightarrow A = (a_{11}) \Rightarrow A = {}^T\!A$

  ed A é ovviamente diagonalizz. con la matrice (1) perché é già diagonale.

- $n-1 \Rightarrow n$

  Hp: ogni matrice $B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ con ${}^T\!B = B$ simmetrica é ort. diag.

  Ts: ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con ${}^T\!A = A$ simmetrica é ort. diag.

---

sia dunque $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con ${}^T\!A = A$

per il teorema spettrale

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda \in Spec(A)$

Sia X un autovettore reale di A di autovalore λ.

1) $AX = \lambda X$

2) $X \neq \underline{0}$; $X \in \mathbb{R}^{n,1}$

Completiamo (X) a base di $\mathbb{R}^{n,1}$ in modo da ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^{n,1}$.

→ COMPLETAMENTO DELLA BASE A PARTIRE DA X

+

→ ORTONORMALIZZAZIONE.

$$\mathcal{B} = (X, X_1 \dots X_{n-1})$$

base ortonormale.

[N.B. Se $AX = \lambda X \Rightarrow$ anche $A(\alpha X) = \lambda(\alpha X)$ $\alpha \neq 0$ quindi possiamo supporre WLOG che X abbia norma $= 1$]

Sia P la matrice che ha per colonne proprio i vettori di $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ $P^{-1} = {}^TP$ è una matrice ortogonale per la prima oss.

calcoliamo

$${}^T(AX) = {}^TX\,{}^TA = {}^TXA = \lambda\,{}^TX$$

$$P^{-1}AP =$$

$$= {}^TPAP = \begin{bmatrix} {}^TX \\ {}^TX_1 \\ \vdots \\ {}^TX_{n-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & X_1 & \dots & X_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^TXAX & {}^TXAX_1 & \dots & {}^TXAX_{n-1} \\ {}^TX_1AX & & & \\ \vdots & & & \\ {}^TX_{n-1}AX & \dots & & {}^TX_{n-1}AX_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$AX = \lambda X$

$$= \begin{bmatrix} \lambda\,{}^TXX & \lambda\,{}^TXX_1 & \dots & \lambda\,{}^TXX_{n-1} \\ \lambda\,{}^TX_1X & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad B \quad} & \\ \lambda\,{}^TX_{n-1}X & & & \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

con $B = {}^{T}B$ infatti

$${}^{T}({}^{T}PAP) = {}^{T}P\,{}^{T}\!A\,P = {}^{T}PAP$$

e quindi $B \in \mathbb{R}^{n-1,\,n-1}$

è simmetrica.

per ipotesi induttiva $\exists$

$Q \in \mathbb{R}^{n-1,\,n-1}$ con ${}^{T}Q = Q^{-1}$

ortogonale e tale che

$${}^{T}QBQ = Q^{-1}BQ = D'$$

con D' matrice diagonale.

PONGO $Q' \in \mathbb{R}^{n,n}$ come $Q' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$

osserviamo che

1) $${}^T Q' Q' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^T Q^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & Q^* \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^T Q^* Q^* \end{array}\right] = I$$

quindi Q' è ortogonale.

2) $${}^T Q' \, {}^T P A P Q' =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^T Q^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^* \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & {}^T Q B Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right]$$

è diagonale.

3) $${}^T Q' \, {}^T P A P Q' = {}^T (P Q') A (P Q')$$

con P, Q' ortogonali $\Rightarrow$

posto $C = PQ'$ abbiamo

$$\left[\begin{array}{c|c} \delta & \\ \hline & D' \end{array}\right] = {}^tC A C$$ con

C ortogonale e quindi anche

$$\left[\begin{array}{c|c} \delta & \\ \hline & D' \end{array}\right] = \underline{C^{-1} A C}$$

ed A è ortogonalmente diagonalizzabile $\square$

CONSEGUENZA:

Sia $* : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare di matrice A. Allora la segnatura di $*$ è data dai segni $+1, 0, -1$ degli autovalori di A.

A simile a $B \iff \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) :$
$A = P^{-1} B P$

A induce p.scal eq. $\iff \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) : A = {}^tP B P$ #

Geometria Affine

↓

Applicazione dell'algebra lineare.

O origine

definiamo come coordinate di Q le componenti del vettore $\vec{OQ}$ rispetto una base assegnata.

Def: Si dice geometria affine di dimensione n su di un campo $\mathbb{K}$ la struttura

$$AG(n,\mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$$

dove A è un insieme (insieme di punti).

$V_n(\mathbb{K})$ è uno sp. vettoriale di dim $= n$ sul campo $\mathbb{K}$.

$$f : A \times A \to V_n(\mathbb{K})$$

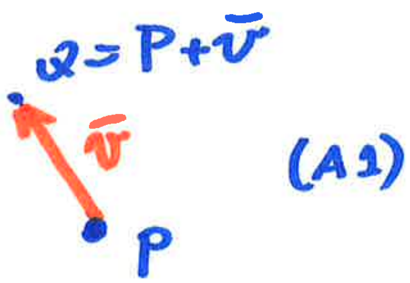
è una funzione che ad ogni coppia di punti associa un vettore e tale che

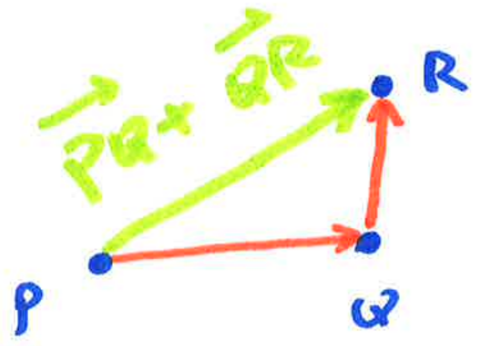
(A1) $\forall\, P \in A,\ \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})\ \exists!\, Q \in A$ tale che $f(P,Q) = \bar{v}$.

Scriveremo anche $\overrightarrow{PQ} = \bar{v}$ o $Q = P + \bar{v}$ chiamando Q il traslato di P mediante $\bar{v}$.

(A2) $\forall\, P, Q, R \in A$

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$





Def: Sia $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$.

Si dice <u>traslazione</u> di vettore $\bar{v}$ la funzione

$$\tau_{\bar{v}} : \begin{cases} A \to A \\ P \to P + \vec{v} \end{cases}$$

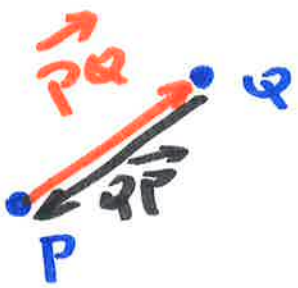
<u>Oss</u> sulle proprietà degli spazi affini.

1) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ infatti da (A2)

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$$ e quindi

sottraendo si ottiene $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ infatti $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \underline{0}$



3) le traslazioni sono biiezioni su A infatti

$$\tau_{-\bar{v}} = -\tau_{\bar{v}}$$

(segue da A1).

per ipotesi una traslazione è iniettiva (proprietà A1)

osserviamo che dati

P e $Q = P + \bar{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = Q + (-\bar{v})$ infatti

$(Q + (-\bar{v})) + \bar{v} = Q$.

$\Rightarrow$ ogni traslazione ammette inversa (ed in particolare le traslazioni sono suriettive).

4) $|A| = |V_n(\mathbb{K})|$

osserviamo che

se $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$, $\bar{w} \in V_n(\mathbb{K})$ con $\bar{v} \neq \bar{w}$

$\Rightarrow \forall P \in A \quad P + \bar{v} \neq P + \bar{w}$

in particolare la funzione

$$g_P : V_n(\mathbb{K}) \to A, \quad \bar{v} \to P + \bar{v}$$

è sicuramente iniettiva.

d'altro canto $\forall Q \in A \ \exists \vec{PQ} \in V_n(\mathbb{K})$
tale che $Q = P + \vec{PQ}$ quindi
la funzione g_P é pure suriettiva.
$\Rightarrow g_P$ é biiettiva e $|A| = |V_n(\mathbb{K})|$

Def: Riferimento Affine

Si dice riferimento affine di
$AG(n, \mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$
una coppia ordinata $\Gamma = (O, \mathcal{B})$
ove O = punto fissato in A
$\mathcal{B}$ = base di $V_n(\mathbb{K})$.

Si dice coordinatizzazione di $AG(n, \mathbb{K})$
rispetto Γ la funzione

$$\Theta_\Gamma : \begin{cases} A \to \mathbb{K}^n \\ P \to \text{componenti di } \vec{OP} \text{ rispetto la base } \mathcal{B}. \end{cases}$$

OSS: Θ_P è una biiezione.

$\forall Q \ \exists! \ \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) : \overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

viceversa $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \ \exists! \ Q : \overrightarrow{PQ} = \bar{v}$

Ad ogni punto $P \in A$ associamo uno ed un solo $(p_1 \dots p_n) \in \mathbb{K}^n$.

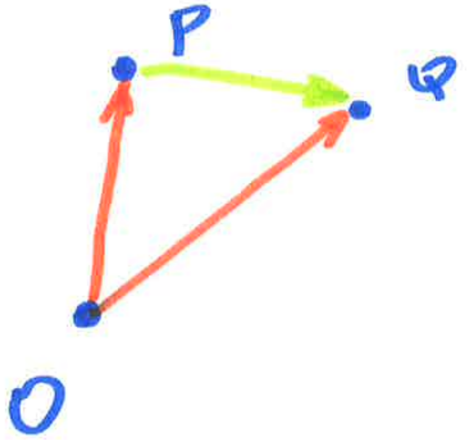
Lemma: Siano $P, Q \in A$, Γ rif. affine e $(p_1 \dots p_n)$, $(q_1 \dots q_n)$ le coordinate di P e Q rispetto a Γ.

$(p_1 \dots p_n) = \Theta(P)$

$(q_1 \dots q_n) = \Theta(Q)$

Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha come componenti rispetto la base $\mathcal{B}$ $\Theta(Q) - \Theta(P)$.

DIM



$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} =$$

$$= -\sum p_i \bar{e}_i + \sum q_i \bar{e}_i =$$

$$= \sum (q_i - p_i)\,\bar{e}_i$$

ed ha componenti rispetto a $\mathcal{B}$ date da

$$\Theta(Q) - \Theta(P). \qquad \square$$

Da questo lemma segue che se

$\Theta(P) = (p_1 \dots p_n)$ punto di coord $(p_1 \dots p_n)$

$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{e}_i$ vettore di comp. $(v_1 \dots v_n)$

$\Rightarrow$ il punto $\boxed{Q = P + \overline{v}}$ traslato di P con il vettore $\overline{v}$

avrà componenti

$$\theta(Q) = (p_1 + v_1 \dots p_n + v_n)$$

$$\theta(Q) = \theta(P) + (v_1 \dots v_n)$$

N.B Importante

In generale si possono sommare vettori ma non si possono sommare punti !!

Sottospazio affine:

Sottoinsieme di uno spazio affine (insieme di punti) che è ancora uno spazio affine rispetto le restrizioni troncate delle operazioni (la f).

OSS: Sia S un sottospazio affine

$\Rightarrow$ S deve essere chiuso rispetto le traslazioni, nel senso che se

$P, Q \in S$ ed $R \in S$

$\Rightarrow R + \vec{PQ} \in S$.

$\vec{PQ} \in W$

$R + \vec{PQ} \in S$

$S = (\tilde{S}, W, f)$

Def: Si dice <u>sottospazio lineare</u> di $AG(n, \mathbb{K}) = (A, V_n(\mathbb{K}), f)$ un insieme di punti

$$[T; W] := \{ T + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \}.$$

ove $T \in A$ e $W \leq V_n(\mathbb{K})$.

Teorema: Sottospazi affini e sott. lineari sono la stessa cosa.