Spazi vettoriali dotati di un prodotto scalare (definito positivo).

**OSS:** Sia $\mathcal{B}$ una base di $V_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}'$ una differente base. Supponiamo che $A$ sia la matrice che rappresenta un prodotto scalare rispetto a $\mathcal{B}$ e $A'$ la matrice che rappresenta il medesimo prodotto scalare rispetto $\mathcal{B}'$?

Che legame c'è fra $A$ ed $A'$?

Sia $P$ la matrice tale che

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

vettori di $\mathcal{B}'$

cioè la matrice che ha per righe le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$.

allora

$$[x_1' \dots x_n'] \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [x_1' \dots x_n'] P \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$${}^tPX' = X \quad \text{ove} \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$${}^tPX' = X$$

$$\boxed{A} = {}^tXAy =$$

$${}^tPy' = y \qquad = {}^tX'PA{}^tPy'$$

$$\Rightarrow A' = PA{}^tP$$ cambiamento di base per forme bilineari

N.B le matrici $A$ ed $A'$ in generale non sono simili!!

Infatti $A$ é simile ad $A'$ <=> $\exists P$ matrice invertibile con

$$A' = PAP^{-1}$$

mentre noi qui abbiamo

$$\boxed{A' = PA^TP}$$

DOMANDA: quale é la base più comoda rispetto cui rappresentare una forma bilineare simmetrica (e più in particolare un prodotto scalare definito positivo)?

Se c'é una base rispetto cui $A$ é diagonale.

# Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. (G/S)

**Input:** Base di $V_n(\mathbb{K})$

**OUTPUT$_1$:** Base di $V_n(\mathbb{K})$ con la proprietà che a 2 a 2 i suoi vettori sono ortogonali

**OUTPUT$_2$:** Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ~~ed il prod. scalare~~ si può ottenere una base in cui i vettori sono a 2 a 2 ortogonali e il prod. scalare di ogni vettore per se stesso è $+1, -1$ oppure $0$.

**OUTPUT$_3$:** Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ed il prod. scalare è definito positivo $\Rightarrow$ BASE ORTONORMALE (in cui il prod. di ogni vett. per se stesso è 1).

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ base.

costruiamo $\mathcal{B}'$ ortogonale.

$$\bar{e}_1' = \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_2' = \bar{e}_2 - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1'$$

$$\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_1' = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1' - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1' = 0$$

$$\bar{e}_3' = \bar{e}_3 - \frac{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1'} \bar{e}_1' - \frac{\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_3}{\bar{e}_2' \cdot \bar{e}_2'} \bar{e}_2'$$

se un vettore $e_i$ é tale che

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 0$$

semplicemente lo si salta quando ~~si pone~~ $\bar{e}_i$ si deve dividere e proiettare.

$$\vdots$$

$$\boxed{\bar{e}_j' = \bar{e}_j - \sum_{i<j} \frac{\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i'}{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'} \bar{e}_i'}$$

$$\vdots$$

$$\bar{e}_n' = \dots$$

La Base $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_n')$ é ortogonale.

per avere una base rispetto cui tutti i prod. scalari di un vettore per se stesso sono $+1, -1$ o $0$

ponete per $i = 1 \dots n$

$$\bar{e}_i'' := \begin{cases} \bar{e}_i' & \text{se } \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|}} \bar{e}_i' & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\bar{e}_i'' \cdot \bar{e}_i'' = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' = 0 \\ \left( \dfrac{1}{\sqrt{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|}} \right)^2 \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i' = \end{cases}$$

$$= \frac{\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'}{|\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_i'|} \in \{-1, +1\}.$$

Se il prodotto scalare è <u>definito positivo</u>

$\Rightarrow \quad \bar{e}_i'' \cdot \bar{e}_i'' = +1 \quad \forall i$ e quindi la base

è ortonormale, cioè

$$\bar{e}_i'' \cdot \bar{e}_j'' = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

**Oss:** A meno di cambiamenti di base un prod. scalare su $V_n(\mathbb{R})$ è univocamente determinato dal numero di $+1, -1, 0$ che compaiono in una matrice che lo rappresenta dopo che si è applicato G/S.

$\to$ segnatura del prod. scalare.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Un prod. scalare definito positivo (= Euclideo) ha segnatura $(+1 \dots +1)$

In teoria della relatività si usa un prod scalare con segnatura $(+1\ +1\ +1, -1)$ oppure $(-1\ -1\ -1, +1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

BASE ORTONORMALE RISPETTO AL PROD. SCALARE DESCRITTO DA $A$

$$\mathcal{B} = \big( \underset{\bar{e}_1}{(1\,0\,0)}, \underset{\bar{e}_2}{(0\,1\,0)}, \underset{\bar{e}_3}{(0\,0\,1)} \big)$$

$$\bar{e}_1' = (1\,0\,0)$$

$$\bar{e}_2' = (0\,1\,0) - \frac{(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}(1\,0\,0) =$$

$$= (0\,1\,0) - \frac{(1\,1\,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{1}(1\,0\,0) =$$

$$= (0\,1\,0) - (1\,0\,0) = (-1\,1\,0)$$

$$\bar{e}_3' = (0\,0\,1) - \frac{(1\,0\,0)A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{1}(1\,0\,0) -$$

$$\frac{(-1\,1\,0)\,A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{(-1\,1\,0)\,A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}(-1\;1\;0) =$$

$$= (0\;0\;1)$$

$$\mathcal{B}' = \big((1\,0\,0), (-1, 1, 0), (0\,0\,1)\big)$$

dividiamo ogni vettore per la sua norma

$$\|\bar{e}_1'\|^2 = (1\,0\,0)\,A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$\|\bar{e}_2'\|^2 = (-1\,1\,0)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$\|\bar{e}_3\|^2 = 3$$

$$\mathcal{B}'' = \Big((1\,0\,0), (-1\,1\,0), \Big(0\;0\;\tfrac{\sqrt{3}}{3}\Big)\Big)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$A' = PA^{T}P$$

ove $P$ contiene le componenti di $\mathcal{B}'$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio. Ortonormalizzare la seguente base di $\mathbb{R}^3$ rispetto il prodotto scalare standard (i.e. quello rappresentato dalla matrice identica rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$)

$$\mathcal{B} = ((1\,0\,0),(1\,1\,1),(0\,1\,-1)).$$

$$e_1' = (1\,0\,0) = e_1''$$

$$\bar{e}_2' = (1\,1\,1) - \frac{(1\,0\,0)\cdot(1\,1\,1)}{(1\,0\,0)\cdot(1\,0\,0)}(1\,0\,0) =$$

$$= (0\,1\,1) \qquad e_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0\,1\,1)$$

$$e_3' = (0\,1\,-1) - \bar{e}_1' \cdot (0\,1\,-1)\,(0\,1\,-1)$$

$$- \frac{e_2' \cdot (0\,1\,-1)}{(0\,1\,1)\cdot(0\,1\,1)}(0\,1\,1) =$$

$$= (0\,1\,-1) \qquad \bar{e}_3'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0\,1\,-1).$$

$$\mathcal{B}'' = \left((1\,0\,0), \left(0\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

$$\bar{\mathcal{B}} = ((1\,1\,1),(0\,1\,-1),(1\,0\,0))$$

$$\bar{e}_1' = \cancel{\sqrt{3}}\,(1\,1\,1) \quad \bar{e}_1'' = \frac{\sqrt{3}}{3}(1\,1\,1)$$

$$\bar{e}_2' = (0\;1\;-1) - \frac{(1\,1\,1)\cdot(0\;1\;-1)}{(1\,1\,1)\cdot(1\,1\,1)}(1\,1\,1)$$

$$= (0\;1\;-1).$$

$$\bar{e}_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0\;1\;-1).$$

$$\bar{e}_3' = (1\,0\,0) - \frac{(1\,0\,0)\cdot(1\,1\,1)}{(1\,1\,1)\cdot(1\,1\,1)}(1\,1\,1)$$

$$- \frac{(1\,0\,0)\cdot(0\;1\;-1)}{(0\;1\;-1)\cdot(0\;1\;-1)}(0\;1\;-1)$$

$$= (1\,0\,0) - \frac{1}{3}(1\,1\,1) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\;-\frac{1}{3}\;-\frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{e}_3'' = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\;-\frac{1}{3}\;-\frac{1}{3}\right)$$

$$\bar{\mathcal{B}}'' = \left((1\,1\,1),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(0\;1\;-1),\ \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2}{3}\;-\frac{1}{3}\;-\frac{1}{3}\right)\right)$$

oss. Siano in $\mathbb{R}^n$ dati due vettori $\bar{x} = {}^T[x_1 \dots x_n]$ e $\bar{y} = {}^T[y_1 \dots y_n]$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare standard

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = {}^T X Y = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

~~Esercizio: Si determini il complemento~~

<u>Def</u>: Sia $V_n^\circ(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale euclideo. (con prod. scalare definito positivo).

e sia $W \leq V_n^\circ(\mathbb{R})$. Si dice

<u>complemento diretto</u> di $W$ in $V_n(\mathbb{R})$

un sottospazio $\mathcal{U} \leq V_n^\circ(\mathbb{R})$ tale che

$$W \oplus \mathcal{U} = V_n^\circ(\mathbb{R}).$$

Teorema: Sia $\mathcal{U} \leq V_n^\circ(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{U}^\perp \oplus \mathcal{U} = V_n$

cioè $\mathcal{U}^\perp$ è un complemento diretto di $\mathcal{U}$ in $V_n^\circ(\mathbb{R})$ detto <u>complemento</u>

DIM: poiché il prod. scalare è definito positivo $\mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{U} = \{\underline{0}\}$ infatti $\bar{x} \in \mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{U} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$

Inoltre il prodotto scalare è non degenere $\Rightarrow$

$\dim \mathcal{U}^{\perp} = n - \dim \mathcal{U} \Rightarrow$

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{U}^{\perp}) = \dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}) =$$
$$= \dim \mathcal{U} + n - \dim \mathcal{U} = n$$

$\Rightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} = V_n$ $\square$

Sia $AX = \underline{0}$ un sistema lineare omogeneo in $n$ incognite $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

cosa sono le soluzioni di $AX = \underline{0}$?

sono i vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tali che

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$[a_{11} \dots a_{1n}] \cdot [x_1 \dots x_n] = 0$$

$$[a_{21} \dots a_{2n}] \cdot [x_1 \dots x_n] = 0$$

$$\vdots$$

$$[a_{m1} \dots a_{mn}] \cdot [x_1 \dots x_n] = 0$$

$$S = \{[a_{11} \dots a_{1n}], \dots [a_{m1} \dots a_{mn}]\}^{\perp}$$

S coincide col complemento ortogonale delle

In particolare

$$S^{\perp} = \{R_1 \dots R_m\}^{\perp\perp} =$$

righe di A

$$= \mathcal{L}(R_1 \dots R_m)$$

$\square$

Es. In $\mathbb{R}^3$ si determini una base del complemento ortogonale dell'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$S^{\perp} = \mathcal{L}(R_1 \dots R_m) \Rightarrow$

$S^{\perp} = \mathcal{L}((2\ 1\ 0), (0\ 1\ 1))$

$\mathcal{B} = ((2\ 1\ 0), (0\ 1\ 1))$

e cosa del sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+z+2=0 \end{cases}$

?

$y = 2 - 2x$
$z = -2 - y = -2 - 2 + 2x = 2x - 4$

$S = (0, 2, -4) + \mathcal{L}((1\ -2\ 2))$

$S^\perp = ((0\ 2\ -4), (1\ -2\ 2))^\perp$

$$\begin{cases} 2y - 4z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$y = 2z$
$x = 2y - 2z = 2z$

$S^\perp = \mathcal{L}((2\ 2\ 1))$ $\square$

N.B. $\mathcal{L}(S_{\text{non omog.}}) \supseteq \mathcal{L}(S_{\text{omogeneo}})$

$\Rightarrow S^\perp_{\text{non omogeneo}} \subseteq S^\perp_{\text{omogeneo}}$.

Sistemi ortonormali e basi
<u>prod. scalare definito positivo</u>

Sia $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ un sistema di $k$ vettori ortonormali di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

Allora $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ è un sistema libero di vettori.

Sia $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \underline{0}$

$\Rightarrow$ moltiplicando scalarmente a dx e sx per $\bar{v}_i$ $(i = 1 \dots k)$.

otteniamo

$$\alpha_i = \alpha_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_i + \dots + \alpha_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i + \dots \alpha_k \bar{v}_k \cdot \bar{v}_i =$$

$$= 0 \cdot \bar{v}_i = 0$$

$\Rightarrow$ $\forall$ coeff. deve essere 0

$\Rightarrow$ la seq. è libera.

Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base ortonormale di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ e sia $\bar{v} \in V_n^\circ(\mathbb{R})$.

Si dice coeff. di Fourier di $\bar{v}$ rispetto $\bar{e}_i$ il valore

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_i}{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i}$$ ma se la base e' ortonormale $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1$

Teorema: le componenti di $\bar{v}$ rispetto una base ortonormale $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ sono proprio i coeff. di Fourier di $\bar{v}$.

DIM: Sia $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_i) = \alpha_j$$

$\square$

Esercizio: calcolare le componenti di

$$\bar{v} = (1\ 2\ 3) \in \mathbb{R}^3$$

rispetto la base ortonormale data da

$$\mathcal{B} = \left((0\ 0\ 1), \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right), \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right).$$

$$(1\ 2\ 3) = \left(\alpha_1 (0\ 0\ 1) + \alpha_2 \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right) + \alpha_3 \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right)\right)$$

e risolvere.

$$v_1 = v \cdot (0\ 0\ 1) = 3$$

$$v_2 = v \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_3 = v \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

proprietà metrica della proiezione ortogonale. $V_n^\circ(\mathbb{R})$ con prod. scalare definito positivo.

$\bar{v}, \bar{w}$ due vettori

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|$$

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

$$\cos \widehat{vw} := \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$$

$\cos \widehat{vw} = \pm 1$ se $\bar{v}$ è proporzionale a $w$

$$\bar{v} = \alpha \bar{w} \Rightarrow$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \alpha \bar{w} \cdot \bar{w} = \alpha \|\bar{w}\|^2$$

e dunque

$$\cos \widehat{vw} = \frac{\alpha \|\bar{w}\|^2}{|\alpha| \|w\|^2} = \pm 1$$

$\|\alpha \bar{v}\| = |\alpha| \, \|\bar{v}\|$

la norma di un vettore rappresenta la sua "lunghezza".

Sia $W \leq V_n^\circ(\mathbb{R})$ e sia $\bar{v}$ un vettore di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ si dice

<u>proiezione ortogonale</u> di $\bar{v}$ su $W$ un vettore $v_{\parallel}$ tale che

$\bar{v}_{\parallel} \in W$ e $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp}$ con

$v_{\perp} \in W^{\perp}$

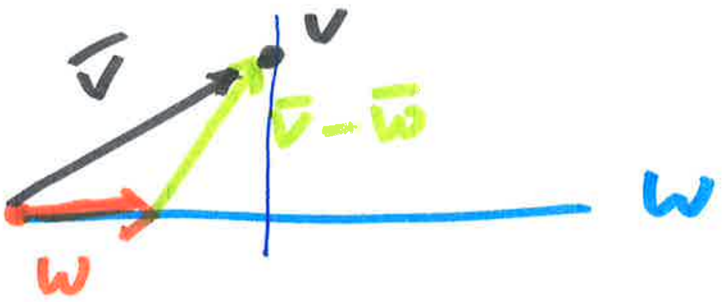
<u>OSS</u>: $\bar{v}_{\parallel}$ e $\bar{v}_{\perp}$ sono univocamente determinati.

Sia $\mathcal{B}$ = base di $W$

$\mathcal{B} = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_m)$

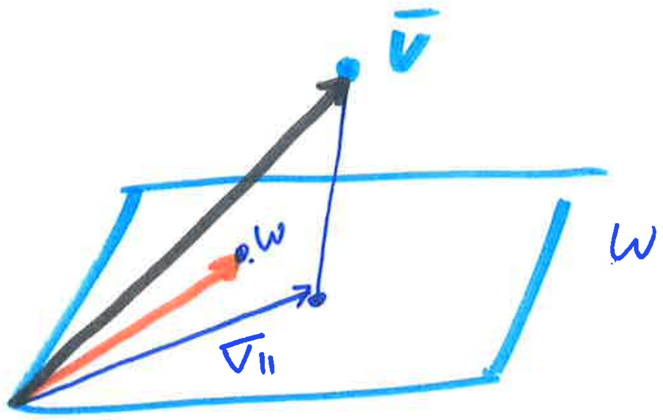
$$\begin{cases} \bar{v}_{\parallel} = \dfrac{v \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1} \bar{w}_1 + \dots + \dfrac{v \cdot \bar{w}_m}{w_m \cdot \bar{w}_m} \bar{w}_m \\ \bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel} \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: $\bar{v}_{\parallel}$ é il vettore di $W$ ~~[illegible]~~ tale che il vettore $\bar{v}-\bar{w}$ al variare di $\bar{w} \in W$ abbia norma minima.




La proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $W$ é il vettore di $W$ "piú vicino" a $\bar{v}$ o, detto meglio, il vettore di $W$ che meglio approssima $\bar{v}$.

<u>DIM</u>: Sia $\bar{v}_{\parallel} \in W$ la proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $W$ e $\bar{w} \in W$ un altro vettore di $W$




calcoliamo $\|\bar{v}-\bar{w}\|^2 =$

$$= \|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}+\bar{v}_{\parallel}-\bar{w}\|^2 =$$

$$\|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}\|^2 + \|\bar{v}_{\parallel}-\bar{w}\|^2 +$$

$$+\, 2\underbrace{(\bar{v}-\bar{v}_{\parallel})}_{\in W_{\perp}} \cdot \underbrace{(\bar{v}_{\parallel}-\bar{w})}_{\in W} =$$

$$= \|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}\|^2 + \|\bar{v}_{\parallel}-\bar{w}\|^2 \leq$$

$$\leq \|\bar{v}-\bar{v}_{\parallel}\|^2 = \|\bar{v}_{\perp}\|^2$$

$\square$

Sia $AX=B$ un sistema lineare che le cui soluzioni corrispondono ad un problema fisico.

$$ax^2+bxy+cy^2+d=0 \qquad a=1$$

curva del II ordine.

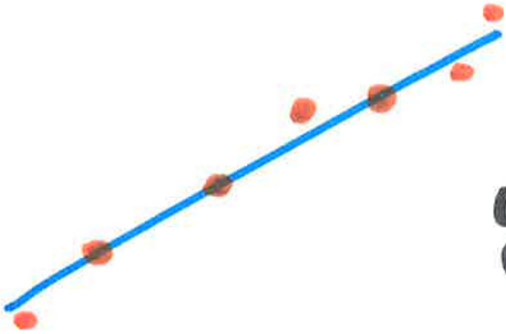
volete trovare la curva che passa per dei punti assegnati $(x_i, y_i)$

$$a=1$$

$$\begin{cases} a x_1^2+bx_1y_1+cy_1^2+d=0 \\ a x_2^2+bx_2y_2+cy_2^2+d=0 \\ \vdots \\ a x_n^2+bx_ny_n+cy_n^2+d=0 \end{cases}$$

$n$ equazioni in 4 incognite $(a, b, c, d)$.

→ per trovare i parametri si risolve il sistema



$$y = ax + b$$

$$(x_1, y_1) = (0, 1)$$

$$(x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$(x_3, y_3) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$$

$$(x_4, y_4) = (3, 4)$$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 1 \\ a \cdot 1 + b = 2 \\ a \cdot 2 + b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$b = 1 \qquad a = 1$

$$3 \neq \frac{7}{2}$$

il sistema è incompatibile.

Vogliamo approssimare il nostro sistema incompatibile con un sistema "il più vicino possibile" che ammetta soluzione.

AL POSTO DI

$$AX = B$$

volere un sistema lineare le cui soluzioni siano quelle di $AX = B'$ con $B'$ "vicino" a $B$.

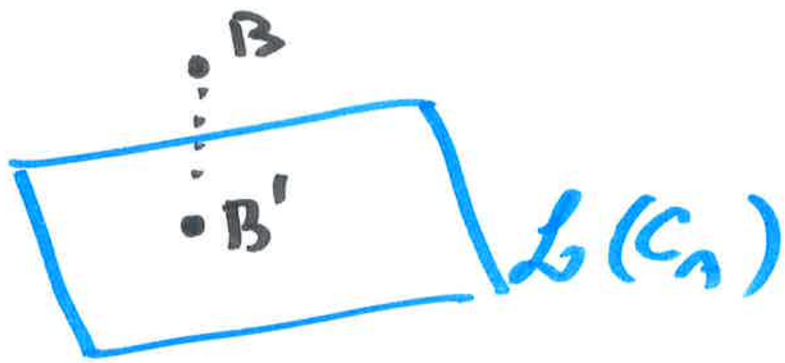
cioè $\|B - B'\|$ il più piccola possibile.

OSS: $AX = B$ è compatibile $\iff B \in \mathcal{L}$ (colonne di $A$)

$\Rightarrow$ noi cerchiamo di sostituire $B$ con un vettore $B'$ che sia tale che $B'$ = proiez. ortogonale di $B$ sullo sp.

delle colonne di A.

$\|B-B'\|$ è minima.




$$AX = B'$$

vediamo come calcolare le soluzioni:

NOI VOGLIAMO $(B-B') \perp \mathcal{L}(C_A)$

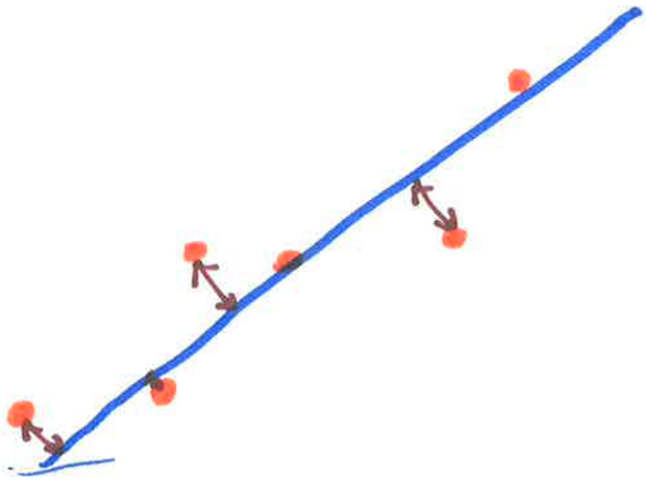
$$(B-AX) \perp \mathcal{L}(C_A).$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{t}A\,(B-AX) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{t}AB = {}^{t}AAX$$

e adesso risolviamo

$$({}^{t}AA)X = {}^{t}AB$$ eq. di minimi quadrati.



nel caso della retta $y = ax + b$
si ottiene la retta che minimizza
la ~~distanza~~ somma delle distanze
al quadrato dei punti dati da
essa.