Forma bilineare

<u>Def</u>: Si dice <u>prodotto scalare</u> una forma bilineare simmetrica $f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

prodotto scalare

$V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

prodotto per scalare

$\mathbb{K} \times V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$

Def: Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare ed $\bar{x} \in V_n(\mathbb{K})$.

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}^{\perp} := \{\bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) : f(\bar{x}, \bar{v}) = 0\}}$$

"x perp"

"$\bar{x}$ ortogonale"

Se $X \subseteq V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$

$$\boxed{X^{\perp} := \{\bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) \mid \bar{v} \in \bar{x}^{\perp} \ \forall \bar{x} \in X\}}$$

$$= \bigcap_{\bar{x} \in X} \bar{x}^{\perp}.$$

per comodità pongo $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K})$

$$\bar{v} \circ \bar{w} := f(\bar{v}, \bar{w})$$

ove f prodotto scalare.

Def: Si dice Radicale di un prodotto scalare f l'insieme

$$Rad(f) = V^{\perp}$$

Un vettore $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ è detto isotropo se $\bar{v} \in \bar{v}^{\perp}$

Teorema: Sia $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare $\Rightarrow Rad(f) = \{\underline{0}\}$ se e solamente se la matrice A che rappresenta f rispetto una qualsiasi base fissata di V ha determinante $\neq 0$.

DIM: Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ e sia A ~~[illegible]~~ la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$.

Cosa ~~vuol~~ vuol dire $\bar{x} \in Rad(f)$?

$\forall \bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$: $f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y},\bar{x}) = 0$

Siano X ed Y rispettivamente i vettori delle componenti di X ed Y rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\Rightarrow f(\bar{y},\bar{x}) = {}^TY A X = {}^TY (AX)$$

e questo deve essere 0 per ogni vettore $Y \in \mathbb{K}^n$ (in particolare i vettori della base canonica).

Ne segue che $AX = \underline{0}$, ma $AX = \underline{0}$ ammette come unica soluzione $\underline{0}$ $\Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0$ cioè $rk(A) = n$. $\square$

Def: Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare.
Si dice che f é <u>non degenere</u> se $Rad(f) = \{\underline{0}\}$.

Si chiama rango di f il rango di una qualsiasi matrice che determina f rispetto una base di $V_n(\mathbb{K})$.

[N.B. Bisognerebbe dimostrare che questo rango non dipende dalla base fissata. In effetti lo si vede osservando che $\mathrm{rk}(f) = n - \dim(\mathrm{Rad}(f))$ e $\mathrm{Rad}(f)$ non è descritto in termini di basi].

Teorema: Sia $X \subseteq V_n(\mathbb{K})$

ALLORA $X^\perp \leq V_n(\mathbb{K})$.

In particolare

1) $\mathrm{Rad}(f) \leq V_n(\mathbb{K})$.

2) $\bar{x}^\perp \leq V_n(\mathbb{K}) \quad \forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{K})$

Inoltre, se f è non degenere

1) $\dim X^\perp = n - \dim \mathcal{L}(X)$

2) $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$

3) $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$.

DIM.

A) $X^{\perp} \leq V_n(\mathbb{K})$

Siano $\bar{u}, \bar{w} \in X^{\perp} \Rightarrow$ per definizione $\forall \bar{x} \in X : \bar{u} \cdot \bar{x} = \bar{w} \cdot \bar{x} = 0$

Sia $(\alpha \bar{u} + \beta \bar{w}) \cdot \bar{x} = \alpha(\bar{u} \cdot \bar{x}) + \beta(\bar{w} \cdot \bar{x}) =$

$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{w} \in X^{\perp}$.

In particolare

$Rad(f) = V^{\perp} \leq V(\mathbb{K})$.

$\bar{x}^{\perp} = \{\bar{x}\}^{\perp} \leq V(\mathbb{K})$.

Sia f un prodotto scalare non degenere e $\mathcal{B}$ una base fissata di $V_n(\mathbb{K})$; A la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$ ed X, Y vettori colonna che rappresentano le ~~[illegible]~~ di coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di elementi $\bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$.

OSS

$$X^{\perp} = \mathcal{L}(X)^{\perp}$$

infatti, sia $\bar{v} \in X^{\perp} \Rightarrow \forall \bar{x} \in X^{\perp}$ abbiamo

$$\bar{v} \cdot \bar{x} = 0$$

ma allora anche $\bar{v} \cdot (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = 0$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\bar{x}, \bar{y} \in X \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}(X)^{\perp}$.

Viceversa osserviamo che $X \subseteq Y$

$$\Rightarrow Y^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \forall \bar{y} \in Y : \bar{v} \cdot \bar{y} = 0 \}$$

$$\subseteq \{ \bar{v} \in V \mid \forall \bar{x} \in X \subseteq Y : \bar{v} \cdot \bar{x} = 0 \} \subseteq X^{\perp}$$

ma $X \subseteq \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X)^{\perp} \subseteq X^{\perp}$

e da quanto visto sopra

$$\boxed{\mathcal{L}(X)^{\perp} = X^{\perp}}$$

calcolare $X^{\perp}$ corrisponde a calcolare le soluzioni di un sistema lineare omogeneo le cui equazioni sono date dai vettori di X partiamo da un insieme $\check{X}$

→ calcoliamo $\mathcal{L}(\check{X})$ ed estraiamo una sua base $(\bar{s}_1 \dots \bar{s}_m)$

e chiamo $S = (s_1 \dots s_m)$

ove s_i é il vettore colonna che rappresenta $\bar{s}_i$ rispetto a $\mathcal{B}$.

La condizione che il vettore $\bar{x}$ rappresentato dalla colonna X sia ortogonale a tutti i vettori di $\check{X}$ si traduce dicendo che

$\bar{X}$ deve essere ortogonale a tutti i vettori $(\bar{s}_1 \dots \bar{s}_m)$.

ovvero che X deve risolvere il sistema lineare $\boxed{{}^{T}SAX = \underline{0}}$

osserviamo che $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow {}^{T}SA$ ha lo stesso rango di S in quanto A rappresenta una trasf. lineare con $\operatorname{Ker} = \underline{0}$ e quindi manda vettori indipendenti in vettori indipendenti.

$${}^{T}SAX = \underline{0}$$

è un sistema lineare omogeneo con $rk({}^{T}SA) = r = \dim \mathcal{L}(\check{X})$

$\Rightarrow$ questo sistema ha

$$\infty^{n-r} \text{ soluzioni.}$$

$$\boxed{\dim X^{\perp} = n - r}$$

(usando il teorema nullità + rango).

3) cosa è $X^{\perp\perp}$?

OSS: $\dim(X^{\perp\perp}) = n - \dim X^{\perp} =$

$$= n - (n - \dim \mathcal{L}(X)) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(X)$$

per dimostrare che $X^{\perp\perp} = \mathcal{L}(X)$ ci basta ora far vedere che $\mathcal{L}(X) \subseteq X^{\perp\perp}$ in quanto essi hanno la stessa dimensione.

Sia $\forall \bar{v} \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \forall \bar{x} \in X^{\perp} : \bar{x} \cdot \bar{v} = 0$

ma allora $\bar{v} \in X^{\perp\perp} \Rightarrow \subseteq$ □

Se $\bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$ e $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ diremo che i vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono <u>ortogonali</u> e scriveremo $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Se $\mathbb{K}$ campo arbitrario ~~[illegible]~~ in generale f non degenere <u>non</u> implica che non esistano vettori isotropi $\neq \underline{0}$

Similmente $\dim \mathcal{L}(X) + \dim \mathcal{L}(X)^{\perp} = n$

ma non è vero in generale che

$$\mathcal{L}(X)+\mathcal{L}(X)^{\perp}=V_n(\mathbb{K})$$

$\Big(\mathcal{L}(X)+\mathcal{L}(X)^{\perp}=V_n(\mathbb{K}) \iff$ la somma fra $\mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X)^{\perp}$ è diretta!

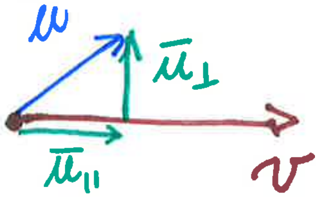
e questo è vero $\iff$ non esiste $\bar{x}\in\mathcal{L}(X)$ $\bar{x}\neq\bar{0}$ tale che $\bar{x}\cdot\bar{x}=0\Big)$.

Lemma: Siano $\bar{u},\bar{v}\in V_n(\mathbb{K})$ e supponiamo $\bar{v}\cdot\bar{v}\neq 0$ ($\bar{v}$ vettore anisotropo)

Allora $\exists!$ (e sono unici!) $\bar{u}_{\parallel}$ ed $\bar{u}_{\perp}$ tali che

$$\bar{u}=\bar{u}_{\parallel}+\bar{u}_{\perp}$$

$$\bar{u}_{\parallel}=\rho\bar{v}\;;\quad \bar{u}_{\perp}\cdot\bar{v}=0$$



DIM poniamo $\begin{cases}\bar{u}_{\parallel}=\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\bar{v}\\ \bar{u}_{\perp}=\bar{u}-\bar{u}_{\parallel}\end{cases}$

mostriamo che $\bar{u}_\perp \cdot \bar{v} = 0$

infatti

$$\bar{u}_\perp \cdot \bar{v} = (\bar{u} - \bar{u}_{\parallel}) \cdot \bar{v} =$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u}_{\parallel} \cdot \bar{v} =$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{v} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v} \cdot \bar{v} =$$

$$= \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \qquad \square$$

Il valore $\lambda_{\bar{v}}(\bar{u}) = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

é detto <u>coeff. di Fourier</u> di $\bar{u}$

rispetto a $\bar{v}$

Il vettore $\lambda_{\bar{v}}(\bar{u})\, \bar{v} = \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v}$

é detto <u>proiezione ortogonale</u> di $\bar{u}$

nella direzione (e verso) di $\bar{v}$

Spazi vettoriali Euclidei

1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

2) Un prodotto scalare $f: V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é detto prodotto scalare Euclideo se esso é definito positivo cioé:

a) $\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R}): \bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$ (positivo)

b) Se $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$ (definito).

Se f é definito positivo $\Rightarrow f$ é non degenere e l'unico vettore isotropo per f é $\underline{0}$

$\bar{X} \cdot \bar{X} = 0 \Rightarrow \bar{X} = \underline{0}$ e quindi $V^{\perp} = Rad(f) = \{\underline{0}\}$.

Teorema: Sia f definito positivo, $X \subseteq V_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \oplus \mathcal{L}(X)^{\perp} = V_n(\mathbb{R}).$$

DIM: Sia $\bar{v} \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(X)^{\perp} \Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$

dall'uguaglianza delle dimensioni di

$$\mathcal{L}(X) \oplus \mathcal{L}(X)^{\perp} \quad e \quad V_n(\mathbb{R})$$

segue che sono il medesimo s. vettoriale. □

Def: Indicheremo con $V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale Euclideo con il prodotto scalare "$\circ$".

Def: Sia $\bar{v} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ un vettore. Definiamo norma di $\bar{v}$ il numero $\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \circ \bar{v}}$.

N.B $\|\bar{v}\| \geq 0$ e $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \underline{0}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha \bar{v}\| = \sqrt{\alpha \bar{v} \circ \alpha \bar{v}} = \sqrt{\alpha^2 (\bar{v} \circ \bar{v})} = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$

N.B $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Def: Un vettore $\bar{v} \in V_n^{\circ}(\mathbb{R})$ è detto versore se $\|\bar{v}\| = 1$

Se $\bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow$ lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\bar{v})$ contiene esattamente 2 versori

$$\pm \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$$

Def: In $\mathbb{R}^n$ si dice prodotto (scalare) Euclideo standard il prodotto scalare rappresentato dalla matrice identica rispetto la base canonica.

$$\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \qquad \bar{y} = (y_1 \dots y_n)$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

e dal fatto che $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ (perché somma di quadrati) e risulta 0

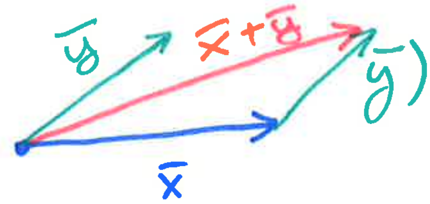
$\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ abbiamo che il prod. scalare è definito positivo.

OSS: il prodotto scalare std. è un prodotto righe per colonne.

Teorema: Sia $V_n^o(\mathbb{R})$ uno s. vettoriale Euclideo con prod. scalare "$\circ$" definito positivo.

Allora valgono le seguenti 2 disuguaglianze $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n^o(\mathbb{R})$

1) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (disug. triangolare)



2) $|\bar{x}\circ\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ (disug. cauchy-Scwartz)

[Def come coseno dell'angolo fra i vettori $\bar{x}$ ed $\bar{y}$

il numero $-1 \leq \dfrac{\bar{x}\circ\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|} \leq 1$]

DIM 2) Se $\bar{x}=\underline{0}$ o $\bar{y}=\underline{0} \Rightarrow$

$\bar{x}\circ\bar{y} = 0 \leq \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| = 0$

Supponiamo $\bar{x}, \bar{y} \neq \underline{0}$ e consideriamo il vettore

$\bar{v}_\alpha = (\alpha\bar{x}+\bar{y})$

poiché il prod. scalare é def positivo

$$\overline{V_\alpha}\cdot\overline{V_\alpha}\geq 0 \quad \forall\alpha$$

$$\overline{V_\alpha}\cdot\overline{V_\alpha}=(\alpha\bar{x}+\bar{y})\cdot(\alpha\bar{x}+\bar{y})=$$

$$=\alpha^2\,\bar{x}\cdot\bar{x}+2\alpha\,\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}\cdot\bar{y}=$$

$$=\alpha^2\|\bar{x}\|^2+2\alpha\,x\cdot\bar{y}+\|\bar{y}\|^2.$$

In particolare il polinomio in α dato da $\overline{V_\alpha}\cdot\overline{V_\alpha}$ non deve mai cambiare di segno $\Rightarrow$ $\frac{\Delta}{4}\leq 0$

$$(x\cdot y)^2-\|\bar{x}\|^2\cdot\|\bar{y}\|^2\leq 0$$

$$(x\cdot y)^2\leq\|\bar{x}\|^2\cdot\|\bar{y}\|^2$$

estraendo $\sqrt{\ }$ e tenendo conto che $\|\bar{x}\|,\|\bar{y}\|\geq 0$

$$\boxed{|x\cdot y|\leq\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|.}$$

c/s

1) $\|\bar{x}+\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\| \Leftrightarrow$

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2\leq\|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2+2\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|$$

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) =$$

$$= \bar{x}\cdot\bar{x} + 2\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{y} \leq$$

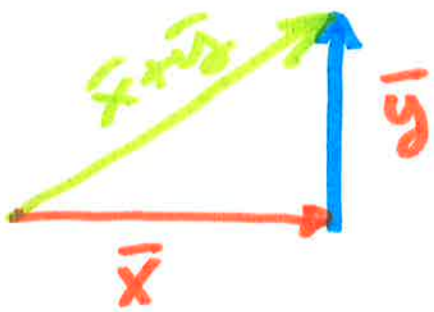
$$\leq \|\bar{x}\|^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| + \|\bar{y}\|^2 \leq$$

$$\leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 =$$

$$= (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \qquad \square$$

<u>OSS</u>: Se $\bar{x} \perp \bar{y} \Rightarrow$

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$$



Teorema di Pitagora.