DIAGONALIZZAZIONE

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\quad AX = \lambda X \quad X \neq \underline{0}$

due matrici simili hanno
stesso determinante
stesso polinomio caratteristico
stesso rango.
stessi autovalori / stesse molteplicità.

→ La relazione di similitudine è di equivalenza su $\mathbb{K}^{n,n}$

Cerchiamo dato A una matrice simile ad A il "più semplice possibile".

CASO PARTICOLARE A diagonalizzabile

cioè $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$AP = PD \quad \text{con } D \text{ diag.}$$

$$P^{-1}AP = D$$

N.B. il prodotto di matrici non è commutativo!

Una matrice A è diagonalizzabile
$\iff$ $\mathbb{K}^n$ ammette una base di
autovettori per A.

Sia $\mathcal{B} = ({}^tP_1 \dots {}^tP_n)$ una base
di autovettori $\quad P = ({}^tP_1 \dots {}^tP_n)$

$$\Rightarrow AP = (A\,{}^tP_1 \dots A\,{}^tP_n) =$$

$$= (\lambda_1 {}^tP_1 \dots \lambda_n {}^tP_n) =$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

viceversa se A diagonalizzabile
$\Rightarrow$ le colonne della matrice
diagonalizzante sono una base
di autovettori per A.

PB: scoprire quando questa cond. vale effettivamente.

Supponiamo X autovettore per A di autovalore λ_X $\Rightarrow$

$$AX = \lambda_X X$$

$$\Rightarrow (A - \lambda_X I)X = \underline{0} \qquad (*)$$

e il sistema $(*)$ ammette soluzioni $\neq \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rk}(A - \lambda_X X) < n$

cioè $\det(A - \lambda_X I) = 0$

Viceversa se $\det(A - \lambda_X I) = 0 \Rightarrow$ il sistema $(*)$ ammette soluzioni non banali (AUTOSOLUZIONI)

~~I possibili~~ gli autovalori di A sono gli elementi di

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) := \{\bar\lambda \mid \det(A - \bar\lambda I) = 0\}.$$

cioè le radici dell'eq. caratteristica di A.

Ad ogni $\bar{\lambda} \in Spec_{\mathbb{K}}(A)$ associamo 2 numeri:

- $m_a(\bar{\lambda})$ = numero di volte che $\bar{\lambda}$ è radice di $\det(A-\lambda I)=0$

  molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$

- $m_g(\bar{\lambda}) = \dim V_{\bar{\lambda}} = n - rk(A-\bar{\lambda}I)$

  ove $V_{\bar{\lambda}} = \{X \mid (A-\bar{\lambda}I)X = \underline{0}\}$.

  molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$

<u>oss</u>: il polinomio $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ ha grado $n \Rightarrow$ esso ha al più n radici in $\mathbb{K}$.

$$\sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} m_a(\bar{\lambda}) \leq n$$

per quanto riguarda $m_g(\bar{\lambda})$ è immediato $1 \leq m_g(\bar{\lambda})$

Teorema $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$

$\forall \bar{\lambda} \in Spec_{\mathbb{K}}(A)$.

<u>DIM</u>: mostriamo che $m_a(\bar{\lambda}) \geq m_g(\bar{\lambda})$.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$; $\bar{\lambda} \in Spec_{\mathbb{K}}(A)$

e supponiamo $m_g(\bar{\lambda}) = t$
$= \dim V_{\bar{\lambda}}$.

Siano $({}^tP_1 \dots {}^tP_t)$ una base di $V_{\bar{\lambda}}$ e $({}^tP_1 \dots {}^tP_t\, {}^tQ_1 \dots {}^tQ_{n-t}) = S$ quello che si ottiene completandola a base di $\mathbb{K}^{n,1}$

$$AS = (A\,{}^tP_1 \dots A\,{}^tP_t\; A\,{}^tQ_1 \dots A\,{}^tQ_{n-t})$$
$$= (\bar{\lambda}\,{}^tP_1 \dots \bar{\lambda}\,{}^tP_t\; A\,{}^tQ_1 \dots A\,{}^tQ_{n-t}) =$$

$$\left(P_1 \cdots P_t\, Q_1 \cdots\right)\left(\begin{array}{ccc|c} \bar\lambda & & & X \\ & \ddots & & \\ & & \bar\lambda & \\ \hline & 0 & & Y \end{array}\right)$$

$$AS = S\left(\begin{array}{c|c} \bar\lambda I & X \\ \hline 0 & Y \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \bar\lambda I_t & X \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = A'$

è simile ad A e dunque in particolare ha lo stesso polinomio caratteristico.

$$P_{A'}(\lambda) = \det\left[\left(\begin{array}{c|c} \bar\lambda I & X \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\right] =$$

$$= (\bar\lambda - \lambda)^t \det(Y - \lambda I)$$

e quindi $\bar\lambda$ è radice del pol. caratteristico di A' (e dunque di A)

almeno t volte $\square$

$$1 \leq m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda}) \leq n$$

$$1 \leq \sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} m_g(\bar{\lambda}) \leq \sum_{\bar{\lambda} \in Spec(A)} m_a(\bar{\lambda}) \leq n$$

$$Spec(A) \neq \emptyset.$$

<u>Def</u>: $\bar{\lambda} \in Spec(A)$ è detto <u>autovalore regolare</u> se

$$m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\bar{\lambda}).$$

per diagonalizzare A ci serve una base di autovettori.

cioè ci serve una base di $\mathbb{K}^{n,1}$ che sia formata da elementi di $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_t}$ con $Spec(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_t\}$.

In particolare <u>deve</u> essere

$$\dim(V_{\lambda_1}+\dots+V_{\lambda_t})=n=\dim \mathbb{K}^{n,1}$$

notiamo che $\dim(V_{\lambda_1}+\dots V_{\lambda_t})\leq$

$$\sum_{i=1}^{t}\dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{t} m_g(\lambda_i)$$

$$\leq \sum m_a(\lambda_i)\leq n$$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ A DIAGONALIZZABILE È

$$\sum m_g(\lambda_i)=n$$

ma questo implica

$$\boxed{\begin{array}{l} m_g(\lambda_i)=m_a(\lambda_i) \quad \forall i \\ \text{e } \sum m_a(\lambda_i)=n \end{array}}$$

D1) tutte le radici dell'eq. caratteristica devono essere in $\mathbb{K}$

D2) tutti gli autovalori devo essere regolari

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

le radici dell'eq. caratteristica sono $\pm i \Rightarrow Spec_{\mathbb{R}}(A) = \phi$

$A' = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $Spec_{\mathbb{R}}(A') = \{1\}$.

su $\mathbb{R}$

su $\mathbb{C}$ $Spec_{\mathbb{C}}(A') = \{1, +i, -i\}$.

e ognuno ha $m_a = 1 \Rightarrow m_g = 1$

[Le condizioni (D1) e (D2) sono anche suff. affinché A si possa diagonalizzare]

Vogliamo mostrare che se $\sum m_g(\lambda_i) = n \Rightarrow$ esiste una base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$

questo richiede che

$$\boxed{\sum \dim V_{\xi_i} = n}$$

e $\boxed{\dim(V_{\xi_1} + \dots + V_{\xi_n}) = n}$

cioè $\dim(V_{\xi_1} + \dots + V_{\xi_n}) = \sum \dim V_{\xi_i}$

in altre parole vogliamo che la somma degli autospazi sia diretta.

$$V_{\xi_1} \oplus V_{\xi_2} \oplus \dots \oplus V_{\xi_n}$$

in questo caso una base di $\mathbb{K}^{n,1}$ si ottiene unendo le basi di

$$V_{\xi_1} \dots V_{\xi_n}$$

$\Rightarrow$ in questo caso $\exists$ una base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$.

Teorema: Siano $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_t}$ gli autospazi di $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$

[la somma di t sottospazi è detta diretta se ogni vettore della loro somma si scrive in modo unico come somma di vettori ognuno app. ad un singolo sottospazio]

<u>DIM</u>: per induzione sul numero t. di sottospazi

- $t = 2$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori di A

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{X \mid AX = \lambda_1 X\} \cap \{X \mid AX = \lambda_2 X\}.$$

$$\bar{X} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow A\bar{X} = \lambda_1 \bar{X} = \lambda_2 \bar{X}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{X} = \underline{0} \\ \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X} = \underline{0}$$

$t-1 \Rightarrow t$ per assurdo.

$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_t}$ non diretta

$\Rightarrow \exists x \in V_{\lambda_1} + \dots V_{\lambda_t}$ tale che

$\exists\ y_i, x_i \in V_{\lambda_i}$ con

$x = y_1 + \dots + y_t = x_1 + \dots + x_t$

e $(y_1 \dots y_t) \neq (x_1 \dots x_t)$. $y_1 \neq x_1$

$\underline{0} = x - x = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_t - y_t)$

$\underline{0} = A\underline{0} = A(x_1 - y_1) + A(x_2 - y_2) + \dots + A(x_t - y_t)$

$= \lambda_1 (x_1 - y_1) + \lambda_2 (x_2 - y_2) + \dots + \lambda_t (x_t - y_t)$

$\underline{0} = \lambda_1 \underline{0} = \lambda_1 (x_1 - y_1) + \lambda_1 (x_2 - \lambda_2) + \dots + \lambda_1 (x_t - y_t)$

$\underline{0} = \underline{0} - \underline{0} = (\lambda_2 - \lambda_1)(x_2 - y_2) + \dots + (\lambda_t - \lambda_1)(x_t - y_t)$

i vettori appartengono ad autospazi $V_{\lambda_2} \dots V_{\lambda_t}$

che sono in numero di $t-1$.

In particolare questi autospazi sono in somma diretta per ipotesi induttiva

$\Rightarrow$ deve essere $\forall i \in \{2 \dots t\}$.

$$(\lambda_i - \lambda_1)(x_i - y_i) = 0$$

d'altro canto $\lambda_i \neq \lambda_1$ se $i \neq 1$

$$\Rightarrow \forall i = 2 \dots t \quad x_i = y_i$$

$$\Rightarrow \quad x = x_1 + x_2 + \dots + x_t =$$
$$= y_1 + y_2 + \dots + y_t =$$
$$= y_1 + x_2 + \dots + x_t$$

sottraendo $x_2 + \dots + x_t$ abbiamo

$$x_1 = y_1$$

e quindi x si scrive in modo unico e la somma è diretta $\square$

Come diagonalizzare una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) calcolare gli autovalori $Spec_{\mathbb{K}}(A)$ e le relative $m_a(\lambda_i)$.

Se $\sum m_a(\lambda_i) \neq n \Rightarrow A$ non è diagonalizzabile $\to$ FINE.

2) $\forall \lambda_i \in Spec(A)$ calcolare $m_g(\lambda_i) = n - rk(A - \lambda_i I)$.

Se $\exists i$ tale che $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$ $\Rightarrow A$ non è diag. $\to$ FINE.

3) Se 1 e 2 hanno avuto successo $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

$\forall \lambda_i \in Spec(A)$ calcolate gli autospazi corrispondenti V_{λ_i} e per ognuno di essi trovate una base $\mathcal{B}_{\lambda_i}$

4) Scrivere le matrici diagonalizzante P e Diagonale simile ad A, D

come

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

entrate sulla diag. principale = autovalori con le dovute molteplicità.

P matrice che ha come colonne i vettori delle basi degli autospazi nel medesimo ordine con cui si sono messi gli autovalori in D.

$\square$

$$\begin{bmatrix} -2 & k \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

per quali valori di k il vettore $(2,-3)$ è autovettore.

Cosa vuol dire $(2,-3)$ autovettore?

$$\begin{bmatrix} -2 & k \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ovvero che $\begin{bmatrix} -2 & k \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

cioè $\begin{bmatrix} -2 & k \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} -4-3k \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} -4-3k & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} -4-3k & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$12 + 9k - 8 = 0$$

$$k = -\frac{4}{9}.$$

metodo corretto ↑

metodo sconsigliato ↓

$$\begin{pmatrix} -2 & k \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolo autovalori

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & k \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 - 2k \qquad -\lambda^2 + 2\lambda - 2k$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 2k > 0 \qquad k < +\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ NON DIAG.

vuol dire che c'è un autovalore con $m_a(\bar{\lambda}) \neq m_g(\bar{\lambda})$.

in particolare poiché

$$1 \leq m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$$

può esserci un autovalore non regolare $\Leftrightarrow$ $k=1$ o $k=2$

$k \neq 1, 2 \Rightarrow Spec(A) = \{1, 2, k\}$.

$k=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $rk(A-I) =$

$= rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$

$m_a(1) = 2$ $m_g(1) = 1$

$k=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $m_a(2)=2$

$$m_g(2) = 3 - rk(A-2I) =$$

$$= 3 - rk\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 =$$

$$2$$

è diagonalizzabile.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$V_1 = \{X \mid (A-I)X = \underline{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \underline{0}\right\}$$

$$= \mathcal{L}((1\,0\,0))$$

$V_2 =$

$$\{X \mid (A-2I)X = \underline{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \underline{0}\right\}$$

$$= \mathcal{L}((2\,1\,0), (0\,0\,1))$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

NON È UN BUON MODO DI RISOLVERE L'ES.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & k & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\bar{v}} = \begin{bmatrix} 6-4k \\ 2 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2$$

multiplo di

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 6-4k \\ 1 & 2 \\ -4 & -8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

Se $\bar{v}$ autovettore

$\Rightarrow \lambda = 2$ autovalore

$\Rightarrow 6-4k = 2 \Rightarrow k = 1$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y + z - 2t = 0 \\ \cancel{-2y - z + 2t = 0} \\ y + z - 3t = 0 \end{cases} \qquad \infty^2 \ \underline{\text{sol}}$$

$\uparrow$

<u>N.B</u> 4 incognite.

$z = 3t - y$

$2y + 3t - y - 2t = 0$

$y = -t$

$z = 4t$

$x = x$

$V_2 = \mathcal{L}\left((1\ 0\ 0\ 0), (0, -1, 4, 1)\right)$

$\square$