Sistemi Lineari

Si dice sistema lineare di m equazioni in n incognite un insieme di m equazioni di primo grado nelle incognite date.

$x_1 x_2 \dots x_n$ incognite.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si dice soluzione del sistema lineare $(*)$ ogni vettore $(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituito ad x_i il valore α_i ogni equazione sia identicamente soddisfatta.

Si dice che un sistema lineare é compatibile se $\exists$ almeno una soluzione dello stesso.

$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ NON é compatibile! $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ é compat.

DOMANDE: DATO un sistema lineare (*)

1) è compatibile?
2) se è compatibile quante soluzioni ha?
3) trovare (tutte) le soluzioni.

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(*) si può scrivere come $\boxed{AX = B}$ (Δ)
(eq. matriciale).

Ragioniamo su (Δ)

le righe di A e di B corrispondono alle equazioni (*).

La matrice A è detta matrice <u>incompleta</u> del sistema, $(A|B)$ è detta matrice <u>completa</u>

B : vettore dei termini noti

X : vettore delle incognite.

QUANDO $AX=B$ è compatibile?

Siano $^tC_1 \dots {}^tC_n$ le colonne di A

$$\Rightarrow \quad AX = ({}^tC_1 \dots {}^tC_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\,{}^tC_1 + \dots + x_n\,{}^tC_n$$

[essere compatibile significa $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ che sostituiti ad $x_1 \dots x_n$ danno B come c. lineare delle colonne di A]

$$\alpha_1\,{}^tC_1 + \dots + \alpha_n\,{}^tC_n = B$$

cioè che B deve appartenere allo spazio vettoriale generato dalle colonne di A

$$\Updownarrow$$

B è linearmente dipendente dalle colonne di A $\Longleftrightarrow \dim \mathcal{L}({}^tC_1 \dots {}^tC_n) = \dim \mathcal{L}({}^tC_1 \dots {}^tC_n\, B)$

$$\dim \mathcal{L}({}^tC_1 \dots {}^tC_n) = \dim \mathcal{L}({}^tC_1 \dots {}^tC_n\, B)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ rk(A) & & rk(A|B) \end{array} \qquad \square$$

Teorema di Rouché-Capelli:

Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile $\iff rk(A) = rk(A|B)$. $\square$

Cerchiamo adesso di capire quante soluzioni ci sono e come sono fatte.

Un sistema lineare $AX = B$ possiamo anche interpretarlo in un modo differente.

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il sistema lineare diviene $f_A(X) = B$

ed esso é compatibile
$\Leftrightarrow$ $B \in \operatorname{Im} f_A$

Inoltre se il sistema é compatibile noi abbiamo che le soluzioni sono l'insieme delle preimmagini di B secondo f_A.

Def: Siano V, W due spazi vett. su di un campo $\mathbb{K}$.
Una funzione $f: V \to W$ é detta lineare se

$$\left[\begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in V \\ \qquad f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) \end{array}\right]$$

f manda combinazioni lineari di V in combinazioni lineari di elementi di W (con i medesimi coeff.).

ESEMPIO.

$$f_A(X) = AX$$

è lineare.

$$f_A(\alpha X+\beta Y) = A(\alpha X+\beta Y) =$$
$$= \alpha AX + \beta AY =$$
$$= \alpha f_A(X) + \beta f_A(Y)$$

<u>OSS</u>: Una funzione lineare manda $f: V \to W$ sottospazi U di V in sottospazi di W.

<u>Def</u>: Sia ~~$f: U$~~ $f: V \to W$ lineare.

Si dice $\ker(f) = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \underline{0}\}$.

($\ker(f)$ oppure nucleo di f).

Definiamo $null(f) := \dim \ker(f)$.

(nullità di f) e $rk(f) = \dim Im(f)$.

OSS: $\ker f \leq V$ infatti

se $\bar{x}, \bar{y} \in \ker f \Rightarrow$

$$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0}$$

$$= \underline{0} \Rightarrow \alpha\bar{x}+\beta y \in \ker f.$$

$\operatorname{Im} f \leq W$ infatti se

$\bar{u}, \bar{v} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, \bar{x}, \bar{y} \in V :$

$\bar{u} = f(\bar{x}),\ \bar{v} = f(\bar{y}) \Rightarrow$

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{v} = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) =$$

$$= f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}) \in \operatorname{Im} f.$$

OSS:
$f_A(X) = AX \Rightarrow$

$\operatorname{Im} f_A$ é generato dalle colonne di A e quindi

$$\operatorname{rk} f_A = \dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rk}(A)$$

OSS: Sia $f: V \to W$ lineare

e sia $\bar{w} \in \operatorname{Im} f$.

Allora le preimmagini di $\bar{w}$ secondo f sono date dall'insieme

$$\bar{x}' + \ker f := \{\bar{x}' + \bar{u} \mid \bar{u} \in \ker f\}.$$

Se $\bar{x}', \bar{y}'$ sono due preimmagini di $\bar{w}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}' - \bar{y}' \in \ker f$.

Viceversa se $\bar{x}'$ é preimmagine di $\bar{w}$ e $\bar{u} \in \ker f \Rightarrow \bar{x}' + \bar{u}$ é preimmagine di $\bar{w}$.

DIM Siano $\bar{x}', \bar{y}' \in V$: $f(\bar{x}') = \bar{w} = f(\bar{y}')$

$$\Rightarrow f(\bar{x}' - \bar{y}') = f(\bar{x}') - f(\bar{y}') = \bar{w} - \bar{w} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \bar{x}' - \bar{y}' \in \ker f.$$

Viceversa se $f(\bar{x}') = \bar{w}$ e $\bar{u} \in \ker f \Rightarrow$

$$f(\bar{x}' + \bar{u}) = f(\bar{x}') + f(\bar{u}) = \bar{w} + \underline{0} = \bar{w}.$$

Conseguenze.

1) f iniettiva $\iff \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

2) La struttura dell'insieme delle preimmagini dipende solo da $\operatorname{Ker} f$.

APPLICAZIONE AI SISTEMI LINEARI

$$AX = B \quad \text{compat.}$$

$$f_A : X \longmapsto AX$$

$\Rightarrow$ ogni preimmagine di B si scrive come $\bar{X}' + Z$ ove $\bar{X}'$ è una preimmagine fissata di X e $Z \in \operatorname{Ker} f_A$ cioè Z è soluzione generale del sistema $AX = \underline{0}$ (sistema omogeneo associato).

$$A(\bar{X}'+Z) = A\bar{X}' + AZ = B + \underline{0} = B$$

è soluzione.

supponiamo $\bar{X}', \bar{Y}'$ due soluzioni

$\Rightarrow A(\bar{Y}'-\bar{X}') = A\bar{Y}' - A\bar{X}' = B - B = \underline{0}$

$\Rightarrow \bar{Y}'-\bar{X}'$ è soluzione Z di $AX = \underline{0}$

$\Rightarrow \bar{Y}' = Z + \bar{X}'$ _!

In generale diciamo che un sistema lineare $AX = B$ compatibile ha ∞^t soluzioni ove $t = \dim \operatorname{Ker} f_A$

$\Rightarrow t = \operatorname{Null}(A)$

ponendo $\infty^0 = 1$

DOMANDA: che legame c'è fra

$\operatorname{Null}(A)$, $\operatorname{rk}(A)$?

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rk\,A = 2$ $\quad$ $rk(A|B) = 2$

ci sono soluzioni!

$$\begin{cases} x = -y \\ -z = 2 \end{cases} \qquad S = \{(x,-x,-2) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

ogni soluzione si scrive come sol. particolare del sistema $(0\ 0\ -2) + \bar{w}$

con $\bar{w} \in \operatorname{Ker} f_A$ cioè $\bar{w}$ soluzione di $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y = 0 \end{cases}$ e questo s. vett. ha dim=1

OSS: $1 = 3 - 2$ → rango della matrice.

↓ numero di incognite

Teorema (Nullità + Rango).

Sia $f: V \to W$ lineare $\Rightarrow$

$$\dim V = \mathrm{null}(f) + \mathrm{rk}(f)$$

cioè

$$\boxed{\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}(f)}$$

applicazione ai sistemi lineari.

Un sistema lineare compatibile $AX = B$ ha esattamente ∞^{n-k} soluzioni

ove n = numero incognite

$k = \mathrm{rk}(A)$

DIM:

Sia dato $\ker f \leq V$

se $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f$ é iniettiva e

$\dim \operatorname{Im} f = \dim V \Rightarrow$ fine.

Altrimenti: Siano

$(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_t)$ una base di $\ker f$

e $(\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{n-t})$ vettori da agg. per completare a base di V

1) $\operatorname{Im} f$ é generata da $f(\bar{f}_1) \dots f(\bar{f}_{n-t})$

infatti ~~im(f)~~

$$f(\bar{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^{n-t} \beta_j \bar{f}_j\right) =$$

$$= \sum \alpha_i \underbrace{f(\bar{e}_i)}_{= \underline{0}} + \sum_j \beta_j f(\bar{f}_j).$$

perché $f(\bar{e}_i) = \underline{0}$ in quanto $\bar{e}_i \in \ker f$.

per concludere mostriamo che i vettori $f(\bar{f}_j)$ per $j=1\dots n-t$ sono base di $\operatorname{Im} f$. cioè sono una seq. libera. (che siano generatori già visto).

$$\gamma_1 f(\bar{f}_1)+\dots+\gamma_{n-t} f(\bar{f}_{n-t})=\underline{0}$$

$$\shortparallel$$

$$f(\gamma_1 \bar{f}_1+\dots+\gamma_{n-t}\bar{f}_{n-t})$$

$$\Rightarrow \gamma_1\bar{f}_1+\dots+\gamma_{n-t}\bar{f}_{n-t}\in \operatorname{Ker} f$$

~~ma i vettori~~ ma lo sp. vett. $\mathcal{L}(\bar{f}_1\dots\bar{f}_{n-t})$ è in somma diretta con $\operatorname{Ker} f$

(altrimenti non avremmo una base di V) $\Rightarrow \gamma_1=\gamma_2=\dots=\gamma_{n-t}=0$ $\square$

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Ker}(f)$$
$$\operatorname{rk}(f) = n - \operatorname{null}(f).$$

3) Trovare le soluzioni di un s. lin.

→ TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE

→ vettore

→ TROVARE ~~tut~~ SOL. DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO.

→ uno spazio vettoriale

⇒ possiamo descrivere queste soluzioni formando una base di tale s.vett.

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x \quad +z-t=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \infty^{4-2} = \infty^2$$

$$(x, y, z, t) = \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \quad\ \ + z - t = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} y + 2t = 0 \\ x + z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2t \\ x = t - z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

dipende da 2 parametri!

$$\ker(A) = \{(t-z, -2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}((1\ -2\ 0\ 1), (-1\ 0\ 1\ 0))$$

$$S = \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ -\tfrac{1}{2}\right) + \ker(A) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\ 0\ 0\ -\tfrac{1}{2}\right) + \mathcal{L}((1\ -2\ 0\ 1), (-1\ 0\ 1\ 0))$$

Sistema lineare

$$AX = B$$

con $A \in GL(n, \mathbb{K})$ $\quad \det(A) \neq 0$

osserviamo che $\exists A^{-1}$ e quindi una soluzione del sistema si ottiene come

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\shortparallel$$

$$IX$$

$$X = A^{-1}B$$

NON SCRIVETE

$X = B/A$ <u>No!!!</u>

Inoltre in questo caso abbiamo

$$\text{null}(A) = n - \text{rk}(A) = n - n = 0$$

e quindi c'è una ed una sola soluzione.

[Supponiamo ce ne siano 2, x, y

$$AX = B = Ay \Rightarrow X = A^{-1}B = y]$$

un sistema lineare di questo genere è detto <u>sistema di Cramer</u>

Supponiamo ora di avere un sistema lineare $AX=B$ con

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $rk(A) = m \leq n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & \cdots \\ & \\ a_{m2} & \cdots \end{matrix}} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

minore $m \times m$ con $\det \neq 0$ $= M$ minore fondamentale

Tenete come incognite quelle che corrispondono alle colonne del minore fondamentale

Tutte le altre le considerate come parametri e spostate a dx dell'uguale.

→ risolvete come se fosse un sistema di cramer.

$$\begin{cases} x+y+2z+t=0 \\ x-y \qquad\quad\; =2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \\ & y & z & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} y+2z=0-x-t \\ -y \qquad =2-x \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -x-t \\ -1 & 0 & 2-x \end{array}\right]$$

sistema in 2 incognite e 2 parametri di Cramer.

Abbiamo trasformato in parametri $n-rk(A)$ incognite.

Cosa succede se abbiamo un sistema lineare compatibile

$$AX = B \quad \text{con} \quad A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

e $rk(A) < m$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

osserviamo che alcune righe della matrice completa saranno comb. lineare di quelle interc. dal minore fondamentale.

→ <u>oss</u> che le equazioni descritte da queste righe dipendenti: ~~non~~ si possono cancellare senza cambiare le soluzioni del sistema!

⇒ si costruisce un nuovo sistema equivalente (= con le stesse soluzioni) al sistema di partenza e poi lo si ~~risolve~~ risolve come prima.

In generale:

DATO un sistema lineare $AX = B$ ove le righe di $A|B$ corrispondono alle equazioni.

1) Se si moltiplica una eq. per uno scalare, l'insieme delle soluzioni non cambia.

2) Se si scambiano 2 equazioni (righe) l'insieme delle soluzioni non cambia.

3) Se si somma ad una equazione una combinazione lineare delle rimanenti.
⇒ l'insieme delle soluzioni non cambia.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

e che $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ sia soluzione.

$$\Rightarrow \gamma(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n) = (b_1)\gamma$$
$$+$$
$$\delta(a_{21}\alpha_1 + \dots + a_{2n}\alpha_n) = (b_2)\delta$$
$$a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

in particolare $\alpha_1 \dots \alpha_n$ soddisfa

$$(\gamma a_{11} + \delta a_{21} + a_{i1})x_1 + \dots + (\gamma a_{1n} + \delta a_{2n} + a_{in})x_n$$
$$= \gamma b_1 + \delta b_2 + b_i$$

Viceversa se $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ soddisfa il nuovo sistema $\Rightarrow$ sottraendo dall'ultima eq. que le c. lin. della I e II che abbiamo

usato si vede che si ha una
sol. del sistema originario.

4) aggiungere/togliere una eq. $0=0$
non cambia nulla