Determinante di una matrice quadrata

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

→ Funzione che ci informa sul se le righe/colonne della matrice in oggetto sono una base di $\mathbb{K}^n$ o no.

→ $\det(A) = 0 \iff$ le righe di A sono legate

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Se $n = 1 \Rightarrow |A| := \det(A) = a_{11}$

$A = (a_{11})$

Se $n > 1$

$\forall j: \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ Formula di Laplace.

ove $A_{ij} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$ è la matrice ottenuta da A cancellando i-esima riga e j-esima colonna.

$j=1$

ES.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} a_{i1}(-1)^{i+1}|A_{i1}| =$$

$$= (-1)^2 a_{11}|A_{11}| + (-1)^3 \cdot a_{21}|A_{21}| =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$- a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$+ a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

FORMULA DI SARRUS

proprietà dei determinanti:

- $\det(A) = \det({}^tA)$

$\Rightarrow \forall j : \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| =$

$= \forall i \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & 7 \end{bmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = 42-55 = -13$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 & 20 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 11 \det\begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- $\det(A)=0$ 1) se in A c'è una colonna/riga di 0

  2) se in A ci sono 2 colonne (2 righe) uguali

  3) se in A ci sono 2 righe/colonne proporzionali.

  4) se in A ~~ci sono due colonne~~ 1 una colonna (riga) dipende linearmente dalle altre.

$\det(A)=0 \iff$ le righe (colonne) di A non sono una base di $\mathbb{K}^n$

i) $\det(I_n) = 1$ $\qquad \det\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} = 1$

ii) Se $A = \underbrace{({}^T C_1 \dots {}^T C_n)}_{\text{colonne di lunghezza } n}$

$$\Rightarrow \det({}^TC_1 \dots {}^TC_i \dots {}^TC_j \dots {}^TC_n) = - \det({}^TC_1 \dots {}^TC_j \dots {}^TC_i \dots {}^TC_n)$$

scambiare 2 colonne (righe) fra loro cambia solo il segno del determinante.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 9 & 1\end{vmatrix} = - \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 0\\ 9 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

iii) Sia $A = ({}^TC_1 \dots \underbrace{\alpha {}^TC_i' + \beta {}^TC_i''}_{\text{colonna } i \text{ esima} = \text{somma di } \alpha {}^TC_i' + \beta {}^TC_i''} \dots {}^TC_n)$

$$\Rightarrow |A| = \alpha \left| {}^TC_1 \dots {}^TC_i' \dots {}^TC_n \right| + \beta \left| {}^TC_1 \dots {}^TC_i'' \dots {}^TC_n \right|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7+3 & 8 \\ 9 & 5+2 & 6 \\ 0 & 1+0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{2} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \boxed{2} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Teorema: $\exists!$ funzione $\det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ che soddisfa le proprietà i), ii) e iii).

Questa funzione è proprio il det definito dalla formula di Laplace.

<u>OSS</u>: Da i) ii) e iii) segue immediatamente che se le colonne di A sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \det(A) = 0$

Se le colonne di A sono dip.
$\Rightarrow \exists\, {}^{T}C_i$ tale che ${}^{T}C_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \, {}^{T}C_j$

$$\Rightarrow \det(A) = |{}^T C_1 \dots {}^T C_i \dots {}^T C_n| =$$

$$= |{}^T C_1 \dots \sum_{j \neq i} \alpha_j {}^T C_j \dots {}^T C_n| =$$

$$= \sum_{j \neq i} \alpha_j |{}^T C_1 \dots {}^T C_j \dots {}^T C_n| = 0$$

tutte queste sono matrici in cui la colonna ${}^T C_j$ compare 2 volte $\Rightarrow$ hanno tutte det = 0

Viceversa: Se le colonne di A sono libere $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

$\Downarrow$

se le colonne di A sono libere

$\Rightarrow$ esse sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ rispetto ad esse mediante c. lineari è sempre possibile scrivere i vettori ${}^T(1 0 \dots 0)$ ${}^T(0 1 \dots 0)$ $\dots$ ${}^T(0 0 \dots 0 1)$

della base canonica di $\mathbb{K}^n$

Se le colonne di A sono libere $\Rightarrow$

$$\exists \quad \bar{v}_1 = (v_{11}\, v_{21} \dots v_{n1})$$
$$\bar{v}_2 = (v_{12} \quad \dots \quad v_{n2})$$
$$\vdots$$
$$\bar{v}_n = (v_{1n} \quad \dots \quad v_{nn})$$

tali che.

$$(*) \quad {}^T C_1 v_{1i} + {}^T C_2 v_{2i} + \dots + {}^T C_n v_{ni} = {}^T \bar{e}_i$$

ove $\displaystyle {}^T\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posizione i.

$\Rightarrow$ osservando che $A^T\bar{v}_i = (*) = \bar{e}_i$

quindi posto $B = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & & v_{nn} \end{pmatrix}$

si vede subito che $AB = I_n$

cioé A é invertibile. ($\Leftrightarrow$ le colonne di A sono libere).

d'altro canto $\det I = 1$

usando le proprietà di multilinearità i), ii), iii)

noi scriviamo $1 = \det I$ come funzione di $\det A$

ma da questo segue che $\det A$ deve essere $\neq 0$.

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é detta invertibile $\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $AB = I$.

Abbiamo verificato che A é invertibile $\Leftrightarrow$ le colonne (righe) di A sono una base di $\mathbb{K}^n$

(e questo é vero $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$).

Il determinante é definito <u>solo</u> per matrici quadrate.

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice rettangolare.

Si dice rango di A l'ordine del più grande minore (= matrice contenuta in A) M di A quadrato con $\det(M) \neq 0$.

ES

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,4}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

si verifica che tutte le altre sottomatrici quadrate di A 3x3 hanno det = 0.

$$rk(A) = \max\{k : \exists M \in \mathbb{K}^{k,k} \text{ con } M \subseteq A \text{ e } \det(M) \neq 0\}.$$

$$A_K = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk(A_K) \geq 2$ perché $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 35 \neq 0$

d'altro canto se $K \neq 0 \Rightarrow$

$\det A_K = -32K \neq 0$ e quindi

$rk(A_K) = 3$ perché il più grande minore con $\det \neq 0$ di A_K è proprio A_K stesso.

$K = 0 \Rightarrow$ tutti i minori 3×3 (ce ne è uno solo) di A_K hanno $\det = 0 \Rightarrow rk(A_0) = 2$.

Teorema (di Kronecker).

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.
Allora la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A é uguale alla dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A ed entrambe coincidono col rango di A.

Inoltre se $M \subseteq A$ é un minore quadrato di ordine massimo con $\det \neq 0 \Rightarrow$ le righe (colonne) intercettate da M sono una base dello sp. vettoriale delle righe (colonne) di A.

$(1\,5\,7\,9\,0)$ $\quad$ $(2\,1\,0\,0\,1)$

$(5\,7\,7\,9\,2)$ $\quad$ $(0\,1\,1\,0\,0)$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ $(2\,3\,2\,0\,1)$

$$\begin{array}{c l}
\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] &
\begin{array}{l} \leftarrow \checkmark \\ \leftarrow \checkmark \\ \leftarrow I + 2II \\ \leftarrow \checkmark \\ \leftarrow II + 2IV \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

non ci sono minori 4×4 con $\det \neq 0$

$\Rightarrow rk(A) = 3$ e una base dello spazio $\mathcal{L}(R)$ è data dai vettori $(1\,5\,7\,9\,0)$, $(2\,1\,0\,0\,1)$, $(0\,1\,1\,0\,0)$

Lemma 1: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice. Allora le righe di A sono linearmente indipend. se e solamente se esse contengono un minore $m \times m$ con determinante $\neq 0$.

DIM: Se le righe di A sono linearmente dip. $\Rightarrow$ una di esse é c. lineare delle rim.

ma in particolare allora anche la medesima riga in ogni sottomatrice ottenuta da A cancellando $n-m$ colonne sará c. lineare delle rimanenti e quindi anche ogni minore $m \times m$ dovrá avere ~~$\det \neq 0$~~ $\det = 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ in dip.

se le righe di A sono in dip.

$\Rightarrow$ é sempre possibile prendere $n-m$ vettori dalla base canonica di $\mathbb{K}^m$ per completare queste righe a Base di $\mathbb{K}^m$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \text{———} & a_{1n} \\ | & & \\ a_{m1} & \text{———} & a_{mn} \\ 0 \; 0 \; 0 \dots 1 \; 0 \dots & & 0 \\ \vdots & & \\ 0 \; 1 \; 0 \dots & \dots 0 & 0 \end{bmatrix}$$

righe di A

righe con esattamente una entrata 1 e le altre $=0$

le righe di A' sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow \det A' \neq 0$ ma sviluppando

det A' rispetto l'ultima riga e poi la penultima etc. si vede che esso è uguale a $\pm \det M$ ove M è un minore $m \times m$ di A.

Ne segue $\det M \neq 0$. ~~[illegible]~~

Esempio.

$$n=7$$

$$m=3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 vettori base di $\mathbb{K}^7$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le righe di una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ sono linearmente indip. $\iff rk(A) = m$ ovvero "A ha rango pieno".

DIM (Kronecker).

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.

e supponiamo $rk(A) = k$.

$\Rightarrow \exists$ in A un minore $k \times k$ M

con det $\neq 0$.

Se prendiamo le sole righe intercettate da M e le mettiamo a matrice, per il lemma prec. esse generano uno s.vett. di dim $= k$.

Quindi, in particolare la dim. dello sp. vettoriale delle righe di A è $\geq k$

Se per assurdo questa dim fosse $k+1 \Rightarrow \exists$ in A $k+1$ righe indipendenti: ma in tal caso prendendo solo queste righe ci sarebbe in A un minore $(k+1)\times(k+1)$ con det $\neq 0$ (sempre per il lemma) $\Rightarrow$ la dim. dello spazio delle righe di A è proprio $k = rk(A)$.

Inoltre, per quanto visto una base di questo spazio è data dalle righe intercettate da M.

Infine, poiché per ogni $M \in \mathbb{K}^{k,k}$

$$\det(M) = \det({}^tM)$$

si vede che quanto detto per le righe di A vale anche per le colonne $\Rightarrow rk(A) = \dim \mathcal{L}(R_i) = \dim \mathcal{L}(C_j)$

Teorema degli orlati:

- Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Allora $rk(A)=k$ se e solamente se A contiene un minore $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det M \neq 0$ e ogni minore $M' \in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$ che contiene M ha $\det = 0$.

(A priori dovremmo far vedere che c'è un minore $M \in \mathbb{K}^{k,k}$ con $\det M \neq 0$ e ogni minore $X \in \mathbb{K}^{k+1,k+1}$ ha $\det = 0$)

$$
rk\,A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 18 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 18 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0
$$

$$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & k & 18 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & 4 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$$

al variare di k.