Lemma di Steinitz.

A seq. libera
B seq. di generatori $\Big\rangle$ di $V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow |A| \leq |B|$

- Sequenza libera di generatori
  $\rightarrow$ BASE $\quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})\ \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) : \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

- $\dim V = \begin{cases} 0 & \text{se } V = \{\underline{0}\}. \\ |B| \text{ con } \mathcal{B} \text{ base} & \text{se } V \neq \{\underline{0}\}. \end{cases}$

- OSS: Ogni spazio vettoriale non banale ($\neq \{\underline{0}\}$) ammette base.

[Teorema basato su A/S $\rightarrow$ nel caso di s. vettoriali finitamente generati $\Rightarrow$ si dimostra col metodo degli scarti successivi]

CONSEGUENZE DI STEINITZ

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n finita sul campo $\mathbb{K}$.

1) Una sequenza di t vettori con $t<n$ non può essere di generatori

2) Una sequenza di k vettori con $k>n$ non può essere libera.

3) Una sequenza libera di n vettori è di generatori $\Rightarrow$ BASE

4) Una sequenza di generatori di n vettori è libera $\Rightarrow$ BASE.

DIM: 1) $\exists$ base di n vettori $\Rightarrow$ seq. libera di n vettori; se abbiamo $t<n$ vettori non possono essere di generatori per Steinitz.

2) $\exists$ base di n vettori $\Rightarrow$ seq. di n generatori $\Rightarrow$ una sequenza di $t > n$ vettori non può essere libera $\Rightarrow$ LEGATA.

3) Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sequenza libera di n vettori. Se non fosse di generatori $\Rightarrow \exists\, \bar{v} \in V \setminus \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
$\Rightarrow$ la sequenza di $n+1$ vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n \bar{v})$ sarebbe libera perché se $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n\, \beta$ tali che

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n + \beta \bar{v} = \underline{0}$$

avremmo

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = -\beta \bar{v}$$

se $\beta \neq 0 \Rightarrow \bar{v}$ c. lineare $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ $\lightning$

se $\beta = 0 \Rightarrow$ da $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ libera segue

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

e quindi la seq. sarebbe libera.

avremmo in V una seq. libera di $n+1$ vettori e una base di n vettori $\rightarrow$ seq. di n generatori ↯

$\Rightarrow (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di generatori.

4) Sia $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di generatori
se non fosse libera $\rightarrow$ scarti succ.
ed otteniamo $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \setminus \{\bar{e}_i\}$.
ancora seq. di generatori ↯
perché avremmo $(n-1)$ generatori
ed una base con n vettori
(n vettori liberi).

$\square$

Esempio : in $\mathbb{R}^4$

$((1010), (1100), (0110), (0001),$
$(2345))$ Legata

$((1130), (4015), (7112))$ NON GENERA

$((1110), (0111), (1101), (1011))$

$$\alpha(1110)+\beta(0111)+\gamma(1101)+\delta(1011)=(0000)$$

$$\begin{cases}\alpha+\gamma+\delta=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ \beta+\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \gamma-\delta=0\\ 2\beta+\delta=0\\ \beta+2\delta=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{cases}$$

$$(\alpha+\gamma+\delta \quad \alpha+\beta+\gamma \quad \alpha+\beta+\delta \quad \beta+\gamma+\delta)$$

$$=(0\ 0\ 0\ 0)$$

$$\begin{cases}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\\ \delta=-2\beta\\ \beta-4\beta=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=0\\ \delta=0\\ \beta=0\end{cases}$$

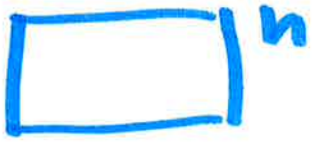
LA SEQ É LIBERA $\Rightarrow$ É ANCHE BASE

perché sono 4 vettori

OSS: 1) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di $\dim = n$.

Allora $\forall i : 0 \leq i \leq n \ \exists W_i \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W_i = i$.

2) Inoltre se $W \leq V_n(\mathbb{K})$ ha $\dim W = n$ $\Rightarrow W = V$.



DIM: Se ~~x~~ $i = 0 \Rightarrow \underline{0} \in V_n(\mathbb{K})$

e in particolare

$\{\underline{0}\} \leq V_n(\mathbb{K})$

$\dim\{\underline{0}\} = 0$

$\Rightarrow W_0 = \{\underline{0}\}$ fine.

Consideriamo $i > 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di V

e poniamo $W_i = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$

$\Rightarrow W_i \leq V$ e $\dim W_i = i$.

2) Sia $W \leq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W = n$

$\Rightarrow \exists$ una base di W fatta da n vettori $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ i vettori $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ sono indipendenti anche in V

$\Rightarrow$ per quanto visto prima (cons 3) sono una base di V

$$\underbrace{\mathcal{L}(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) = W}_{\text{perché base di } W} = \underbrace{\mathcal{L}(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) = V}_{\text{perché } n \text{ vettori ind. in } V \Rightarrow \text{ base di } V.}$$

$\square$

Come manipolare i sottospazi di uno s. vettoriale $V(\mathbb{K})$?

$\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$ sottospazi.

1) $\mathcal{U} \cap W \leq V(\mathbb{K})$

verificate usando la proprietà di chiusura.

$\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W$
$\bar{y} \in \mathcal{U} \cap W$ $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U} \cap W$

$\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U}$
$\bar{x}, \bar{y} \in W \Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$ $\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U} \cap W$

perché $\mathcal{U}, W$ sottospazi.

N.B $\mathcal{U} \cap W \ni \underline{0}$ perché è sottospazio

l'intersezione di 2 sottospazi non è __mai__ vuota!!

$\mathcal{U} \cap W \neq \emptyset$ può essere $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

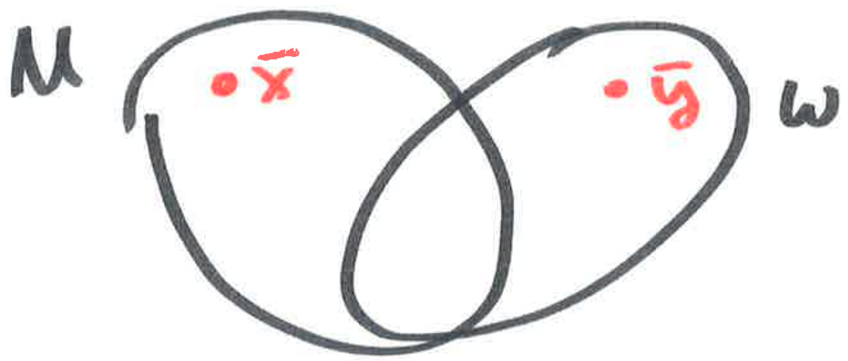
$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$$

perché $U \cap W \leq U$
$U \cap W \leq W$

In generale $U \cup W$ non é un sottospazio di $V(\mathbb{K})$

Teorema: siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ allora $U \cup W \leq V(\mathbb{K})$ se e solamente se $U \subseteq W$ (e quindi $U \cup W = W$) oppure $W \subseteq U$ (e quindi $U \cup W = U$).

DIM: Supponiamo per assurdo che $\exists \bar{x} \in U \setminus W$ ed $\bar{y} \in W \setminus U$



e $\mathcal{U} \cup W \le V(\mathbb{K})$. $\Rightarrow$ $\underbrace{\bar{x}+\bar{y}}_{=\bar{z}} \in \mathcal{U} \cup W$

$\Rightarrow$ o $\bar{z} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{z}-\bar{x} = \bar{y} \in \mathcal{U}$ ↯

oppure $\bar{z} \in W \Rightarrow \bar{z}-\bar{y} = \bar{x} \in W$ assurdo ↯

$\bar{z}, \bar{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow \bar{z}-\bar{x} \in \mathcal{U}$

$\bar{z}, \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{z}-\bar{y} \in W$

In particolare vale la tesi:

cioè $\mathcal{U} \cup W \le V(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq W$ o $W \subseteq \mathcal{U}$ $\square$

Def: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$

si dice somma di $\mathcal{U}$ e W

$$\mathcal{U} + W = \{\bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W\}.$$

Teorema: $\mathcal{U} + W = \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$

La somma di $\mathcal{U}$ e W è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene sia $\mathcal{U}$ che W (e quindi $\mathcal{U} \cup W$).

DIM: 1) Se $\bar{u} \in \mathcal{U} \Rightarrow$

$$\mathcal{U} = \{\bar{u} + \underline{0} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} + W$$

perché $\underline{0} \in W$

$$W = \{\underline{0} + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\} \subseteq \mathcal{U} + W$$

perché $\underline{0} \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{U} \cup W \subseteq \mathcal{U} + W$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U}+W)$$

Se $X \leq V(\mathbb{K})$ e $\mathcal{U} \cup W \subseteq X \Rightarrow$

sicuramente $\forall \bar{u} \in \mathcal{U}$

$\forall \bar{w} \in W$, $\bar{u} + \bar{w} \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U} + W \subseteq X$

(*) $\mathcal{U} + W \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U}+W)$

DIMOSTRIAMO CHE $\mathcal{U} + W \leq V(\mathbb{K})$

e quindi $\mathcal{L}(\mathcal{U}+W) = \mathcal{U}+W$

e dunque da (*) segue

$\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W) = \mathcal{U} + W$.

Siano $\begin{matrix} \bar{u}_1 + \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 + \bar{w}_2 \end{matrix} \in \mathcal{U} + W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

e consideriamo

$\alpha(\bar{u}_1 + \bar{w}_1) + \beta(\bar{u}_2 + \bar{w}_2) =$

$$\alpha\bar{u}_1 + \alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{u}_2 + \beta\bar{w}_2 =$$

$$= \underbrace{(\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2)}_{\in W} \in U + W$$

$\square$

<u>OSS</u>: Siano $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ due basi di U e di W $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una sequenza di generatori per $U + W$

Es. In $\mathbb{R}^{2,2}$

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$U + W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \underset{\uparrow \atop \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U+W) \leq \dim U + \dim W$$

$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$$

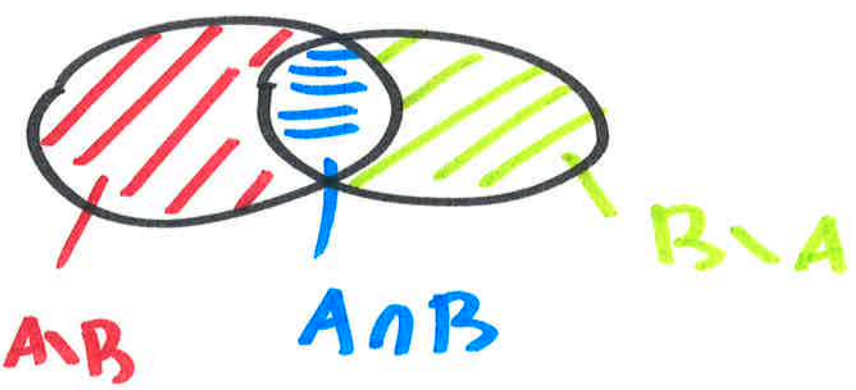
Formula di Graßmann

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

legata a formule di tipo inclusione/esclusione

Siano A, B due insiemi.

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$



$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ $\quad$ $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B|$$
$$- |A \cap B| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$

<u>Es</u>: Siano A, B, C tre insiemi $\Rightarrow$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$$
$$- |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

1) $\dim \mathcal{U} + W = \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \mathcal{U} \cap W$

2) $0 \leq \dim \mathcal{U} \cap W \leq \min(\dim \mathcal{U}, \dim W)$

3) $\max(\dim \mathcal{U}, \dim W) \leq \dim \mathcal{U} + W \leq$
$\min(\underline{\dim V}, \dim \mathcal{U} + \dim W)$

perché $\mathcal{U} + W \leq V$

Es. In $\mathbb{R}^4$ se avete

$$U = \mathcal{L}((1010),(0100),(0001))$$

$$W = \mathcal{L}((1110),(0201)).$$

$$\dim(U \cap W) \geq 1$$

$$\dim(U+W) \leq \min(4, 3+2) = 4$$

$$4 \geq \dim(U+W) = 3+2-\dim U \cap W$$

$$4 \geq 5 - \dim U \cap W$$

$$\dim U \cap W \geq 5-4 = 1$$

Abbiamo visto che in generale se $\mathcal{B}_U$ base di U, $\mathcal{B}_W$ base di $W \Rightarrow \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ é solo di gen. per $U+W$.

Vogliamo capire quando $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ é anche libera.

Def: Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$.
Si dice che la somma di U e W é diretta e si scrive

$$U \oplus W$$

se $\forall \bar{v} \in U \oplus W \ \exists! \ \bar{u} \in U, \bar{w} \in W$ tale che $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$.

oss: Se $U \oplus W \Rightarrow$ data una base $\mathcal{B}_U$ di U e una base $\mathcal{B}_W$ di W si ha $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ base di $U \oplus W$.

<u>verifica</u>: $\mathcal{B}_U = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$

$\mathcal{B}_W = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_m)$.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n \bar{w}_1 \dots \bar{w}_m)$.

mostriamo che $\underline{0}$ si scrive in modo unico come c. lineare degli el. di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$

$$\underline{0} = \underbrace{\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n}_{\in U} + \underbrace{\beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_m \bar{w}_m}_{\in W}$$

$$= \underline{0} + \underline{0}$$

ma $\underline{0} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n \Rightarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ perché

$\mathcal{B}_U$ base di U.

$\underline{0} = \beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_n \bar{w}_n \Rightarrow$

$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ perché

$\mathcal{B}_W$ base di W

$\Rightarrow \forall$ i coeff. sono nulli $\Rightarrow \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ libera!

Teorema $\mathcal{U} \oplus W \iff \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

conseg immediata

$$\dim(\mathcal{U} \oplus W) = \dim \mathcal{U} + \dim W$$
$$= \dim \mathcal{U} + \dim W - 0 =$$
$$= \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim(\mathcal{U} \cap W)$$

[caso particolare della formula di Grassmann]

Dim: $\mathcal{U} \oplus W$ e sia $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W$.

$\forall\, \bar{v} \in \mathcal{U} \oplus W \ \exists!\, \bar{u} \in \mathcal{U}\ \bar{w} \in W$

tale che

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

se $\bar{x} \in \mathcal{U} \cap W \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{u} + \bar{x} \in \mathcal{U} \\ \bar{w} - \bar{x} \in W \end{array}$

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{u} + \bar{x},\ \bar{w} = \bar{w} + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$$

cioè $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

Viceversa: supponiamo $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}$.

se la somma non fosse diretta $\exists\, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathcal{U}, \bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$ tali che $\exists\, \bar{v} \in V$ con

$$\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1 = \bar{u}_2 + \bar{w}_2$$

e $(\bar{u}_1, \bar{w}_1) \neq (\bar{u}_2, \bar{w}_2)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}_{\in W}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2$$

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in \mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{w}_2 = \bar{w}_1 \quad \text{↯}$$

quindi la somma è diretta. □