Spazio vettoriale → sottospazi vettoriali

<u>Def</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale $W \subseteq V(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale se esso è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di $V(\mathbb{K})$ opportunamente ristrette e troncate.

$V(\mathbb{K})$: $\quad \oplus : V \times V \to V \qquad \oplus_{W\times W} : W \times W \to V$

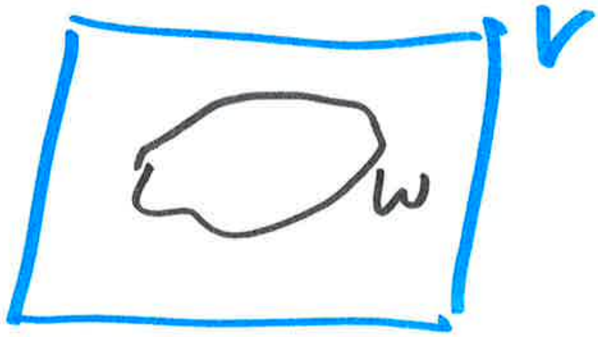
<u>DATO</u> $\quad * : \mathbb{K} \times V \to V \qquad *_{\mathbb{K}\times W} : \mathbb{K} \times W \to V$

ABBIAMO $\quad \oplus^{W}_{W\times W} : W \times W \to \underline{\underline{W}}$

$*^{W}_{\mathbb{K}\times W} : \mathbb{K} \times W \to W$

che soddisfano ancora gli assiomi di spazio vettoriale.

La restrizione non dà problemi



ci serve che

$$(*)\ \begin{cases} \mathrm{Im}\left(\oplus_{W\times W}\right) \subseteq W \\ \mathrm{Im}\left(*_{\mathbb{K}\times W}\right) \subseteq W \end{cases}$$

La somma di vettori di W deve dare un vettore di W; il prodotto per scalare di un vettore di W per $\alpha \in \mathbb{K}$ deve essere un vettore di W.

In generale le condizioni $*$ bastano affinché $W \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sottospazio}}}{\leq} V(\mathbb{K})$.

<u>OSS</u>: $(*)$ è equivalente a dire che $\boxed{\forall \bar{v}, \bar{w} \in W,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in W}$

con $\alpha = \beta = 1$ vi dice $\forall \bar{v}, \bar{w} \in W: \bar{v} + \bar{w} \in W$

con $\alpha \in \mathbb{K}, \beta = 0$ vi dice $\forall \bar{v}, \bar{w} \in W: \alpha\bar{v} + 0\bar{w} = \alpha\bar{v} \in W$

viceversa se valgono (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v},\bar{w} \in W:\ \alpha\bar{v}, \beta\bar{w} \in W$

$\Rightarrow \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in W.$

(*) $\boxed{\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v},\bar{w} \in W: \alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in W}$

proprietà di chiusura di W.

(*) → 1) che ⊕ e * ristr/trone a W sono ben definiti.

2) le proprietà pseudo-associativa e pseudo-distributive valgono quando si lavora con vettori di W.

→ valevano $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v},\bar{w} \in V$

$\Rightarrow$ valgono a maggior ragione $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ \forall \bar{v},\bar{w} \in W.$

3) resta da verificare che ⊕ su W definisce una struttura di gruppo abeliano.

→ far vedere che $\underline{0} \in W$

e far vedere che $\forall \bar{w} \in W$, $-\bar{w} \in W$

(le proprietà assoc. e commutativa valgono di sicuro perché valgono $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$).

→ da (*) segue $\forall \bar{v}, \bar{w} \in W$

$$\underline{0} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{w} \in W$$

Inoltre $\quad \underset{\substack{\parallel \\ -\bar{v}}}{-1 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{w}} \in W$ $\square$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$W_1 = \{(a, b, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. $\not\ni (0\,0\,0)$

W_1 é sottospazio? NO

$W_2 = \{(a, 0, 0), (0, a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

W_2 é sottospazio? $\quad (1\,0\,0), (0\,1\,0) \in W_2$

$(1\,1\,0) \notin W$

<u>NO</u>

$W_3 = \{(a^2, b^2, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

è sottospazio? NO

$(1\ 0\ 0) \in W_3$ ma $(-1\ 0\ 0) \notin W_3$

$W_4 = \{(x, 2x+y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

è sottospazio?

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall (x, 2x+y, y), (x'\ 2x'+y', y') \in W_4$

$\alpha(x, 2x+y, y) + \beta(x'\ 2x'+y', y') \in W_4$

$\parallel$

$(\alpha x\ \ 2\alpha x + \alpha y\ \ \alpha y) + (\beta x'\ \ 2\beta x' + \beta y'\ \ \beta y')$

$= (\alpha x + \beta x'\ \ 2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y')\ \ \alpha y + \beta y')$

$\parallel$

$(x''\ \ 2x'' + y''\ \ y'') \in W_4$

$\alpha x + \beta x' = x''$

$\alpha y + \beta y' = y''$

W_4 è sottosp. vettoriale.

Esercizio: per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$W_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=k,\ x-z+ky=0\}.$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

C.N. $(0\,0\,0) \in W_k \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow k=0$

se $k \neq 0 \Rightarrow W_k \not\leq \mathbb{R}^3$

vediamo che succede per $k=0$

$$\Rightarrow W_0 = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \begin{matrix} x=z \\ x=-y \end{matrix}\right\} =$$

$$= \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1\ -1\ 1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$(a, -a, a) \quad (b, -b, b) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(a\ -a\ a) + \beta(b\ -b\ b) =$$

$$(\alpha a + \beta b \quad -\alpha a - \beta b \quad \alpha a + \beta b) =$$

$$(c, -c, c) \in W_0$$

ove $c = \alpha a + \beta b$ $\square$

$$W'_k := \{(x, y, z) \mid x^2 - ky^2 = 0\}. \qquad k \in \mathbb{R}$$

quando é s. vettoriale?

$\underline{0} \in W'_k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$k > 0$

$k = 0$

$k < 0 \Rightarrow x^2 - ky^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

$$\Rightarrow W'_k = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

é s. vettoriale.

$$k = 0 \Rightarrow W'_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 = 0\} =$$

$$= \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

é s. vettoriale.

$$k > 0 \Rightarrow W_k = \{(x\ y\ z) \mid (x + \sqrt{k}\,y)(x - \sqrt{k}\,y) = 0\}.$$

$$= \{(x\ y\ z) \mid (x+\sqrt{k}\,y)=0\}$$

$$\cup \{(x\ y\ z) \mid (x-\sqrt{k}\,y)=0\} =$$

$$= \{(-\sqrt{k}\,y, y, z), (\sqrt{k}\,y, y, z) \mid \cancel{x}y, z \in \mathbb{R}\}.$$

oss: $(-\sqrt{k}, 1, 0), (\sqrt{k}, 1, 0) \in W_k$

$$(-\sqrt{k}, 1\ 0) \oplus (\sqrt{k}\ 1\ 0) = (0\ 2\ 0) \notin W_k$$

$\Rightarrow W_k$ NON É SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\begin{array}{l} k \leq 0: \ W_k \leq \mathbb{R}^3 \\ k > 0: \ W_k \nleq \mathbb{R}^3 \end{array}}$$

$\square$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vett. e siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$ vettori $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ scalari.

⇒ il vettore

$$\sum \alpha_i \bar{v}_i = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

è detto combinazione lineare dei vettori $\bar{v}_i$ con gli scalari α_i

W è sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$
$\Leftrightarrow$ ogni combinazione lineare di un numero finito di vettori di W appartiene a W

$\downarrow$

W è chiuso rispetto le c. lineari (finite) di suoi vettori.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale ed $X \subseteq V(\mathbb{K})$ sottoinsieme.

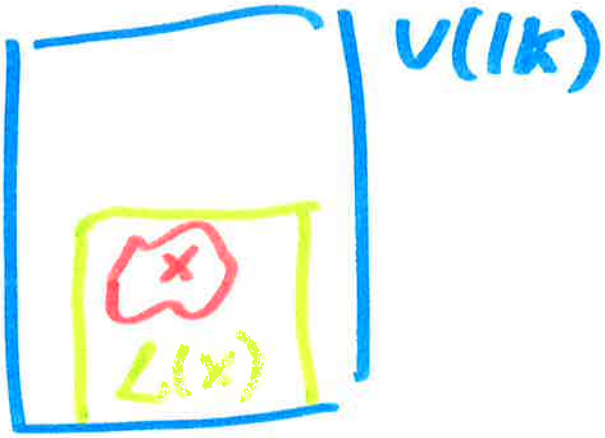
Quale è il più piccolo sottospazio $W \subseteq V(\mathbb{K})$ che contiene X?

vedremo che si potrà costruire
W a partire da X.

→ chiamo copertura lineare di X

$X \longmapsto \mathcal{L}(X)$ più piccolo sottosp. di $V(\mathbb{K})$ contenente X.
$\langle X \rangle$

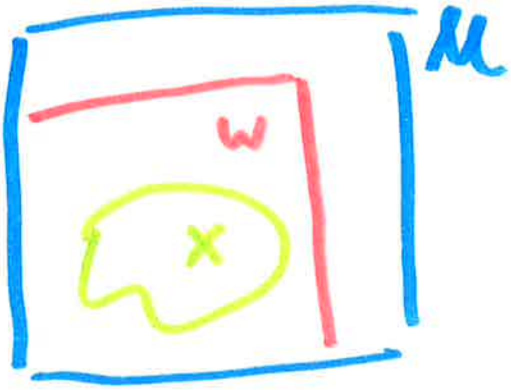
e dirò che $\mathcal{L}(X)$ è generato da X



"più piccolo" = non esiste alcun sottospazio con meno elementi che contiene X.

→ W più piccolo sott. che contiene X
se $\forall$ U sottospazio che contiene X
$W \subseteq U$.

[$W \leq V(\mathbb{K})$ e $\forall\, \mathcal{U} \leq V(\mathbb{K})$ con $X \subseteq \mathcal{U}$ abbiamo $W \leq \mathcal{U}$]



ne segue che non ci possono essere sottospazi T con $X \subseteq T$ e $T \subsetneq W$

Definiamo $\forall\, X \subseteq V(\mathbb{K})$ l'insieme

$$\boxed{\mathcal{L}_V(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{K}, \bar{x}_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}.}$$

insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di un numero finito di elementi di X.

__oss:__ $\mathcal{L}_V(X) \subseteq \mathcal{L}(X) = W$

$\mathcal{L}_V(X)$ è sicuramente contenuto nel più piccolo sott. W che contiene X in quanto W è chiuso rispetto c. lineari finite di suoi elementi e quindi è anche chiuso risp. comb. lineari finite di un suo sottoinsieme X

$\rightarrow$ per far vedere $\mathcal{L}_V(X) = W$ basta allora far vedere che $\mathcal{L}_V(X)$ è un sott. vettoriale di $V(\mathbb{K})$ cioè che $\mathcal{L}_V(X)$ soddisfa la proprietà di chiusura.

Siano $\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i \quad v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i$

$\Rightarrow \forall \ell, m \in \mathbb{K}$

$$\ell \overline{v_1} + m \overline{v_2} = \ell \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x_i} + m \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\ell \alpha_i + m \beta_i) \overline{x_i} \in \mathcal{L}_v(X)$$

$\square$

Esempi.

$$X = \{(1 \ -1 \ 1)\} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}(X) = \{\alpha (1 \ -1 \ 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(\alpha \ -\alpha \ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$$X' = \{(1 \ 0 \ 1), (0 \ 1 \ 0)\}.$$

$$\mathcal{L}(X) = \{\alpha (1 \ 0 \ 1) + \beta (0 \ 1 \ 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\alpha \ \beta \ \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$X'' = \{(1\,0\,0), (2\,0\,0), (3\,0\,0)\}.$$

$$\mathcal{L}(X'') = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(2\,0\,0) + \gamma(3\,0\,0) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\alpha + 2\beta + 3\gamma, 0\,0) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}. =$$

$$= \{(\delta, 0\,0) \mid \delta \in \mathbb{R}\}. = \mathcal{L}(\{(1\,0\,0)\})$$

$$X''' = \{(\alpha^2\,0\,0) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

$$\downarrow$$

$$X''' = \{\alpha^2(1\,0\,0) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(X''') \supseteq \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}((1\,0\,0))$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X''')$ contiene tutti i multipli a coeff. in $\mathbb{Q}$ di $(1\,0\,0)$.

viceversa ogni ~~[illegible]~~ ~~(1 ? ?)~~ elemento di $\mathcal{L}(X''')$

deve avere come II e III comp.

0

$$\mathcal{L}(X''') \subseteq \mathcal{L}((100)) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(X''') = \mathcal{L}((100)) = \{\alpha(100) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

ATT. è importante che il numero di vettori presi sia finito nelle c. lineari!

$\mathcal{L}(X''')$ deve essere sott. vettoriale di $\mathbb{Q}^3$

se potessimo costruire delle "serie" di vettori allora a partire dagli el. di X''' potremmo anche costruire una serie che converge al vettore $(\pi, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ e questo non va bene!

OSS sulle proprietà di $\mathcal{L}$: INSIEMI $\rightarrow$ SOTTOSPAZI

1) Se $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y)$

2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$

perché $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ è il più piccolo s.vett. contenente $\mathcal{L}(X)$ ed $\mathcal{L}(X)$ è già s. vett..

3) $\mathcal{L}(X) = X \Leftrightarrow X$ è spazio vett.

se sapete scrivere un insieme come copertura lineare di un altro $\Rightarrow$ sapete che è un sottospazio!

$$\{(\alpha\ \beta\ 3\alpha+2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\alpha(1\,0\,3)+\beta(0\,1\,2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$= \mathcal{L}((1\,0\,3),(0\,1\,2)) \quad \square$$

"$\mathcal{L}$ è un operatore di chiusura"

4) $\mathcal{L}(\emptyset) := \{\underline{0}\}$. $\rightarrow$ il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ è $\{\underline{0}\}$.

in particolare il più piccolo sottospazio che contiene $\emptyset$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ e quindi è $\{\underline{0}\}$.

<u>OSS</u>: Il simbolo $\mathcal{L}(X)$ è definito in uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}(\phi) = \{(0,0)\}.$$

$$\text{in } \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\phi) = \{(0\,0\,0)\}$$