



Algebra e Geometria

Primo Appello - 13/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k - 1)y + z = k + 1 \\ y - z + t = 1 - k \\ x - y + (k + 1)z + t = 1 \end{cases}$$

- B) Si determini un complemento ortogonale rispetto il prodotto euclideo standard della copertura lineare dell'insieme $\mathcal{A} = \{(2 + \alpha, -2, 3 + \alpha, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- C) Si determini un prodotto scalare $\star : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(1, 1), (1, 0)$ sia una base ortonormale rispetto ad esso.

- D) Si determini al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ quando la matrice

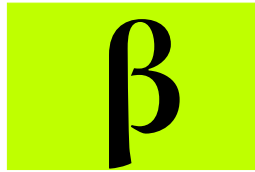
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k - 1 \\ -1 & 2 & 2k - 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{C})$ si determinino equazioni reali del luogo r dei punti reali del piano $\pi : x + 2iy + z - 3 = 0$. Quali sono i punti impropri di r ?

- F) Si determini per quali valori di k (se esistono) la polare del punto $(1, 1)$ rispetto la conica $C_k : x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2x + 2y + (k - 1) = 0$ è la retta $x = -\frac{1}{2}$.

- G) Al variare del parametro reale k si consideri la quadrica di equazione $Q_k : kxy + z^2 + x + y = 0$. Si determini la natura di Q_k ed i suoi eventuali punti multipli.



Algebra e Geometria

Primo Appello - 13/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} (k-1)x + y + z = k+1 \\ x - z + t = 1 \\ x - y - (k+1)z - t = -1 \end{cases}$$

- B) Si determini un complemento ortogonale rispetto il prodotto euclideo standard della copertura lineare dell'insieme $\mathcal{A} = \{(2 + \alpha, -2, 3 + \alpha, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- C) Si determini un prodotto scalare $\star : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(1, -1), (1, 0)$ sia una base ortonormale rispetto ad esso.

- D) Si determini al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ quando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2k \\ 1 & 2 & 2k-1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{C})$ si determinino equazioni reali del luogo r dei punti reali del piano $\pi : x + y + iz - 3i = 0$. Quali sono i punti impropri di r ?

- F) Si determini per quali valori di k (se esistono) la polare del punto $(1, 1)$ rispetto la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + (k-1) = 0$ è la retta $y = -\frac{1}{2}$.

- G) Al variare del parametro reale k si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k : xy + z^2 + kx + ky = 0$. Si determini la natura di \mathcal{Q}_k ed i suoi eventuali punti multipli.



Algebra e Geometria

Primo Appello - 13/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k-1)y + z = 1 \\ x - y - t = 1 - k \\ (k+1)x - y + z + t = 1 \end{cases}$$

- B) Si determini un complemento ortogonale rispetto il prodotto euclideo standard della copertura lineare dell'insieme $A = \{(2 + \alpha, -2, 3 + \alpha, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- C) Si determini un prodotto scalare $\star : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(-1, 1), (1, 0)$ sia una base ortonormale rispetto ad esso.

- D) Si determini al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ quando la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{C})$ si determinino equazioni reali del luogo r dei punti reali del piano $\pi : ix + y - 2z - 3i = 0$. Quali sono i punti impropri di r ?

- F) Si determini per quali valori di k (se esistono) la polare del punto $(1, 1)$ rispetto la conica $C_k : x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2x + 2y + (k-1) = 0$ è la retta $x = -\frac{1}{2}$.

- G) Al variare del parametro reale k si consideri la quadrica di equazione $Q_k : kxy + z^2 + x + y = 0$. Si determini la natura di Q_k ed i suoi eventuali punti multipli.



Algebra e Geometria

Primo Appello - 13/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (2k - 1)y + z = 2k + 1 \\ y - z + t = 1 - 2k \\ x - y + (2k + 1)z + t = 1 \end{cases}$$

- B) Si determini un complemento ortogonale rispetto il prodotto euclideo standard della copertura lineare dell'insieme $\mathcal{A} = \{(2 + \alpha, -2, 3 + \alpha, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- C) Si determini un prodotto scalare $\star : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(1, -1), (0, 1)$ sia una base ortonormale rispetto ad esso.

- D) Si determini al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ quando la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 - 2k \\ -1 & 2 & 2k - 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

- E) In $\mathcal{E}_3(\mathbb{C})$ si determinino equazioni reali del luogo r dei punti reali del piano $\pi : x + (i - 2)y + 5z - 3 = 0$. Quali sono i punti impropri di r ?

- F) Si determini per quali valori di k (se esistono) la polare del punto $(1, 1)$ rispetto la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + (k - 1) = 0$ è la retta $y = -\frac{1}{2}$.

- G) Al variare del parametro reale k si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k : xy + kz^2 + x + y = 0$. Si determini la natura di \mathcal{Q}_k ed i suoi eventuali punti multipli.



Algebra e Geometria

Primo Appello - 13/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

- A) Si discuta al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del seguente sistema lineare precisandone il numero delle soluzioni

$$\begin{cases} x + (k - 1)y + z = 1 \\ x - y - t = 1 - k \\ (k + 1)x - y + z + t = 1 \end{cases}$$

- B) Si determini per quali valori di k il vettore $(1, 1)$ è autovettore di $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$. Se esistono siffatti valori di k , qual è il corrispondente autovalore?

- C) Si determini una base del complemento ortogonale del sottospazio $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 + x_3 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}$ in \mathbb{R}^4 .

- D) In $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ fissato il riferimento $\Gamma = [0, (e_1, 2e_2)]$. Si determini una base dello spazio di traslazione della retta $r : 2x - 3y + 4 = 0$.

- E) In $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ si scriva una iperbole con asintoti paralleli alle rette $r : x - y = 4$ ed $s : x + 2y = 3$.

- F) In $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, al variare del parametro reale k si determini la posizione reciproca dei due piani $\pi : x - 2ky + z = k$ e $\sigma : x - 2ky - kz = 2 - k$.

- G) Siano $r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$ due rette in $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Si determini la natura della quadrica ottenuta ruotando r attorno ad s ed i suoi eventuali punti doppi.
