

prodotti scalari definiti positivi:

$$\bullet V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Nozione di base ortonormale.
mediante b/s.

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$\bullet: V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{B}^\circ = (\bar{e}_1^\circ \dots \bar{e}_n^\circ) \text{ ove}$$

$$\bar{e}_i^\circ \cdot \bar{e}_j^\circ = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

1) Se $\bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$ e

$$\bar{v} = a_1 \bar{e}_1^\circ + \dots + a_n \bar{e}_n^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{v} \cdot \bar{e}_i^\circ = a_i}$$

calcolare le
componenti rispetto
 $\mathcal{B}^\circ$ corrisponde a
calcolare i prodotti
scalari

Esempio in $\mathbb{R}^3$

$$B = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 1, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

$$\bar{v} = (1, 2, 3) \quad \begin{matrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{rispetto} \\ \text{prod. scalare} \\ \text{standard.} \end{matrix}$$

$$\bar{v} = \cancel{v_1} \bar{f}_1 + v_1 \bar{f}_1 + v_2 \bar{f}_2 + v_3 \bar{f}_3$$

$$v_1 = (1, 2, 3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}$$

$$v_2 = (1, 2, 3) \cdot (0, 1, 0) = 2$$

$$v_3 = (1, 2, 3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \cancel{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

le componenti di $\bar{v}$ sono
 $(2\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$

2) Sia B ortogonale rispetto al prod. scalare "•".

Allora la matrice di "•" rispetto a B è la matrice identica $n \times n$.

Perché $B = ((\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j))_{i,j=1}^n =$

$$= ((\delta_{ij}))_{i,j=1}^n \quad \text{ove}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto scalare

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (x'_1 \dots x'_n) = x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n$$

che ha come matrice rappresentativa la matrice identica rispetto alla base canonica.

Come sono fatte le matrici
di cambiamento di base
rispetto basi ortonormali

~~Definizione~~

$$E' = TE$$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix}$$

in particolare

$$X = {}^t T X'$$

$\Rightarrow$ per forme bilineari:

se A rappresenta "•" rispetto
a B , A' lo rappresenta
rispetto $B' \Rightarrow$

$${}^t X A Y = {}^t X' A' Y' = {}^t X' T A T Y'$$

da cui

$$A' = T^t A T$$

in particolare se B, B'
sono ortonormali $\Rightarrow A' = I = A$

$$I = T^t T$$

cioè $T^{-1} = T^t$

Def: Una matrice T è detta
ortogonale se $T^t = T^{-1}$

Le matrici di cambiamento di
base fra basi ortonormali sono
ortogonali.

oss: le righe/colonne di una
matrice ortogonale formano
un sistema ortonormale

DM: Se A tal que ${}^t A = A^{-1}$

$$A = (C_1 \dots C_n)$$

$${}^t A A = \begin{pmatrix} {}^t C_1 \\ \vdots \\ {}^t C_n \end{pmatrix} (C_1 \dots C_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t C_1 C_1 & {}^t C_1 C_2 & \dots & {}^t C_1 C_n \\ \vdots & & & \\ {}^t C_n C_1 & \dots & & {}^t C_n C_n \end{pmatrix} = I$$

||

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot C_1 & C_1 \cdot C_2 & \dots & C_1 \cdot C_n \\ \vdots & & & \\ C_n \cdot C_1 & \dots & & C_n \cdot C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne segue $C_i \cdot C_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$$\text{Sia } {}^t A = A^{-1} \Rightarrow \det(A) = \pm 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I) = \det({}^t A A) = \\ &= \det({}^t A) \cdot \det(A) = \\ &= [\det(A)]^2 \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice reale e simmetrica.

$\Rightarrow$ autospazi associati ad autovalori distinti di A sono ortogonali fra loro (nel senso che se $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_\lambda \subseteq V_\mu^\perp$ oppure $V_\lambda^\perp \subseteq V_\mu$)

~~cioè~~

Mostriamo che $\forall \bar{v} \in V_\lambda, \forall \bar{w} \in V_\mu$ vale $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Sia X autovettore di autovalore λ e Y autovettore di autovalore μ . e calcoliamo

$$\lambda(X \cdot Y) = \lambda^t X Y =$$

$$= {}^t(A X) Y = {}^t X {}^t A Y =$$

$$= {}^t X (A Y) = \mu {}^t X Y =$$

$$= \mu(X \cdot Y)$$

$$A = {}^t A$$

poiché $\lambda \neq \mu \Rightarrow X \cdot Y = 0$

□

Teorema (della base spettrale).

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è

ortogonalmente diagonalizzabile

(cioè diag. con matrice diagonalizzante ortogonale) se e solamente se

$$A = {}^t A$$

#

DIM: $\Rightarrow$ Supponiamo A ortogonalmente
diagonalizzabile. $\Rightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{R})$
e D diagonale tali che

$$AP = PD$$

$$\text{e } {}^t P = P^{-1}$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1} = PD {}^t P$$

ma allora ${}^t A = {}^t (PD {}^t P) =$
 $= P {}^t D P = PD {}^t P = A$

$\uparrow \quad \uparrow$
perché D
diagonale
e dunque
simmetrica.

($\Leftarrow$)
per induzione sull'ordine n
della matrice A .

1) $n=1 \rightarrow$ ogni matrice 1×1 è
simmetrica e diagonale
rispetto la base formata
dal vettore $(1) \rightarrow \alpha_k$

1) Supponiamo che il teorema valga per tutte le matrici (reali e simmetriche) di ordine $n-1$ e mostriamo che vale per quelle di ordine n .

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ con } {}^t A = A.$$

Supponiamo che A ammetta almeno un autovettore reale λ

Sia X_λ un autovettore di autovalore λ per A

(esiste perché $m_\lambda(\lambda) \geq 1$)

Sia ora B una base di $\mathbb{R}^n$ già ottenuta completando a base (X_λ)

$$B = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

possiamo sempre ortogonalizzare

$$B \text{ ed ottenere } B^o = (X_1, X_2', \dots, X_n')$$

(supposto $X_1 \cdot X_1 = 1$)

$$\text{allora possiamo } P = (X_1 X_2' \dots X_n')$$

e calcoliamo

$${}^t P A P = {}^t P (A X_1 A X_2' \dots A X_n') =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t X_1 \\ \vdots \\ {}^t X_n' \end{pmatrix} (A X_1 \dots A X_n') =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t X_1 A X_1 & {}^t X_1 A X_2' & \dots & {}^t X_1 A X_n' \\ {}^t X_2' A X_1 & {}^t X_2' A X_2' & \dots & {}^t X_2' A X_n' \\ \vdots & & & \\ {}^t X_n' A X_1 & \dots & & {}^t X_n' A X_n' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {}^tX_1(SX_1) & {}^tX_1AX_2' & \dots & {}^tX_1AX_n' \\ {}^tX_2'(SX_1) & & & \\ \vdots & & & \\ {}^tX_n'(SX_1) & \dots & \dots & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 \cdot SX_1 & {}^tX_1AX_2' & \dots & {}^tX_1AX_n' \\ X_2' \cdot SX_1 & & & \\ \vdots & & & \\ X_n' \cdot SX_1 & \dots & \dots & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & {}^tX_2'AX_1 & \dots & {}^tX_n'AX_1 \\ 0 & \boxed{\text{ALTRO: } C} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{C} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = {}^t P A P$$

oss: la matrice C è simmetrica
di ordine $(n-1) \times (n-1)$

$$\text{infatti } {}^t({}^t P A P) = {}^t P {}^t A P = {}^t P A P = \\ = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & {}^t C \end{bmatrix} \text{ e dunque } C = {}^t C$$

possiamo applicare l'induzione
su $C \Rightarrow$ esiste una matrice

$$P' \in GL(n-1, \mathbb{R}) \text{ con } {}^t P' = P'^{-1}$$

$$\text{tale che } {}^t P' C P' = D_0$$

$\hookrightarrow$ diagonale

polindromo $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} P' \end{array} \right)$

ed $R = PQ$.

ASSERTO: ${}^t R = R^{-1}$ (quindi R ortogonale) e

$R^T A R$ è diagonale.

$$\begin{aligned} 1) \quad {}^t R R &= {}^t Q {}^t P P Q = {}^t Q Q = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P' \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^t P' P' \end{array} \right) = I \Rightarrow \\ &\Rightarrow {}^t R = R^{-1} \end{aligned}$$

$$2) \quad {}^t R A R = {}^t Q \left[{}^t P A P \right] Q =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_{P'} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array} \right]$$

ϵ_{PAP}

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_{P'CP'} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & D_0 \end{array} \right]$$

DIAGONALE.

□

la matrice R è matrice
 diagonalizzante ortogonale
 per A

Esercizio: trovare una matrice ortogonale che diagonalizzi:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda) [(2 - \lambda)^2 - 1] = \\ &= (3 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_A(3) &= 2 & m_A(1) &= 1 \\ &\text{"} & & \\ m_B(3) & & & \end{aligned}$$

$$V_3 = \text{Ker} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \mathcal{L} \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

$$V_1 = \text{Ker} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right] = \mathcal{L} \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) \right)$$

una matrice diagonalizzante è
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{non è ortogonale.}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{questa s\`i.}$$

N.B esistono per A anche
matrici diagonalizzanti Q
cui colonne non sono
nemmeno ortogonali fra loro!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ \textcolor{red}{\textit{e diagonalizzante}}}$$

$\underbrace{\quad}_{V_3} \quad \underbrace{\quad}_{V_2}$

$\text{ma non ha colonne ortogonali!!}$

Geometria Affine

Spazi vettoriali e loro propriet\`a



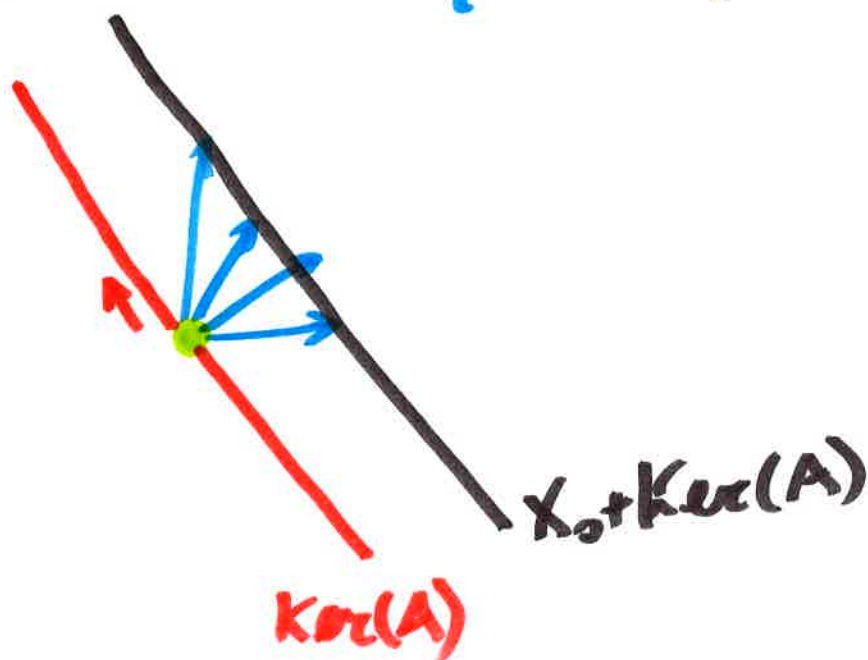
insiemi di soluzioni
di un sistema lineare
omogeneo.

Come rappresentare la situazione
con sistemi lineari: non omogenei.

$$AX=B \text{ con } \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$$

Sappiamo che le soluzioni
di tale sistema sono del tipo

$$X_0 + \text{Ker}(A) = \{X_0 + z \mid z \in \text{Ker}(A)\}$$



Spazio affine: struttura data da
punti, rette, ... sottospazi (affini)

i punti corrispondono ai vettori
di uno spazio vettoriale $V_n(K)$.

le rette corrispondono ai
traslati di sottospazi di $\dim = 1$
cioè insiemini di punti del tipo

$$X_0 + V_1 \text{ con } V_1 \leq V_n(K) \\ \dim V_1 = 1$$

i piani ai traslati di sott. di $\dim = 2$

$$X_0 + V_2 \text{ con } V_2 \leq V_n(K) \\ \dim V_2 = 2$$

i "sottospazi affini" ai traslati di
sottospazi di $\dim = k \leq n$.

$$x+y=1$$

