Quadriche generali: Q quadrica

π_∞ piano improprio

→ $C_\infty = Q \cap \pi_\infty$

C_∞ →
- iperboloidi — C_∞ irrid. a pti reali
- paraboloidi — C_∞ riducibile
- ellissoidi — C_∞ irrid. priva di punti reali.

→ Sia Q una quadrica irriducibile e P un suo punto semplice.
(Se Q cono o cilindro $\Rightarrow P \neq$ Vertice).

Si dice che P è un punto

- iperbolico → il p.no tg in P interseca Q in 2 rette reali e distinte
- ellittico → 2 rette immaginarie e coniugate.
- parabolico → 1 retta reale contata 2 volte.

OSS: Per un punto iperbolico passano 2 rette reali contenute in Q.

Per un punto ellittico ne passano 0 (2 rette imm. coniugate).

per un punto parabolico ne passa 1 reale. (contata 2 volte).

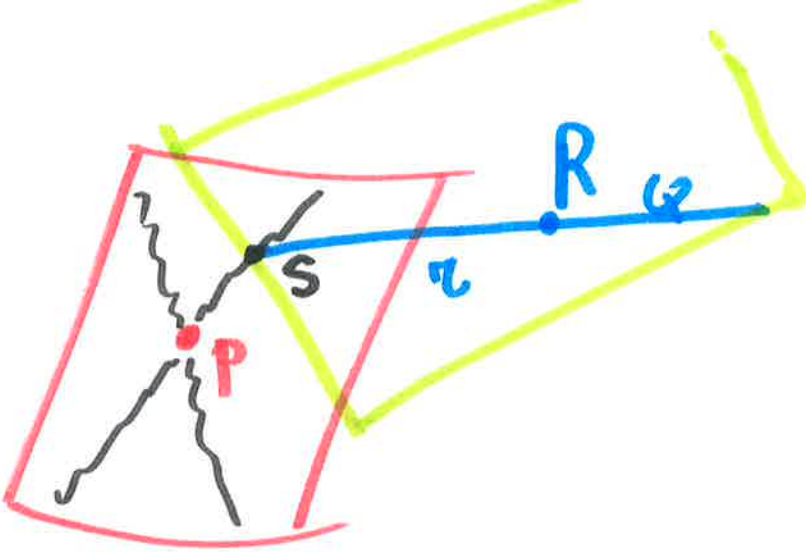
Teorema: tutti i punti semplici di una quadrica sono del medesimo tipo.

DIM Supponiamo Q quadrica e P punto ellittico di Q.

Sia π_P il piano tg a Q in P.

Allora $\pi_P \cap Q = \{P\}$.

Sia adesso R un altro punto semplice di Q. Se R non fosse ellittico $\Rightarrow$ il pn tg a Q in R intersecherebbe Q in almeno una retta r reale.



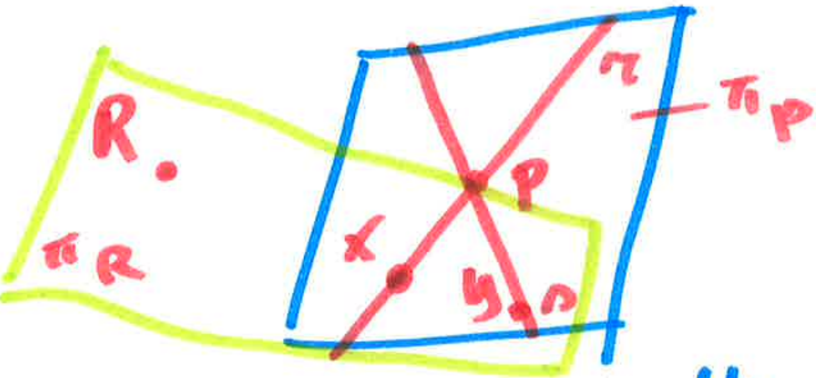
La retta r per R deve intersecare il piano tangente π_P in un punto reale. (perché una retta reale ed un piano reale in $PG(3, \mathbb{K})$ hanno sempre almeno un punto in comune) $r \cap \pi_P = S$

Ma non può essere $S = P$ perché altrimenti ci sarebbe una retta reale per P e dunque P non sarebbe ellittico.

Non può nemmeno essere $S \neq P$ perché se $Q \cap \pi_P$ e $Q \cap \pi_P$ ha solo un punto reale. $\lightning$ ASSURDO

R deve essere un punto ellittico.

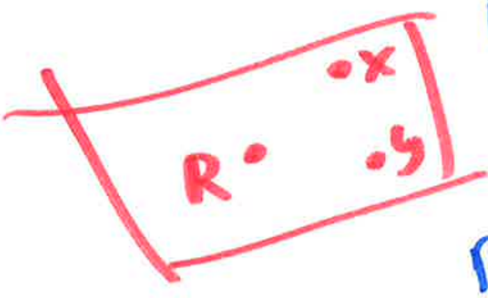
Sia ora $P \in Q$ iperbolico; π_P il piano tg in P a Q e $r \cup s = \pi_P \cap Q$.



Sia ora R un altro punto di Q con $R \notin \pi_P \cap Q$.

Allora il piano tg. a Q per R diciamo π_R interseca π_P in una retta che non passa per P (perché R non è coniugato a P).

$\Rightarrow$ π_R interseca r ed s in due punti distinti. X ed Y.



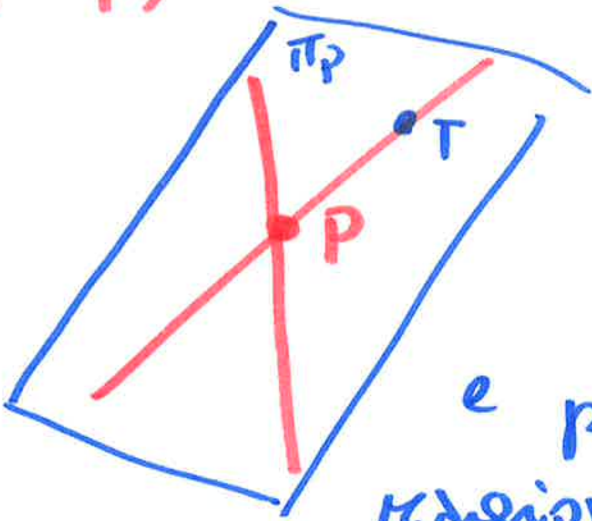
D'altro canto $\pi_R \cap Q$ è una conica con R punto doppio e passante per X e per Y.

e tale che $R \notin \overline{XY}$ (perché altrimenti $R \in XY \subseteq \pi_P$ ma abbiamo supposto $R \notin \pi_P$).

Ne segue che $\pi_R \cap Q = RX \cup RY$

$\Rightarrow$ R é iperbolico.

Cosa succede ai punti su π_P (visto che abbiamo ragionato su $R \notin \pi_P$).



P iperbolico.

$T \neq P$ con $T \in \pi_P$ e per poter ragionare su T prendiamo un R qualsiasi con

$R \in Q$, $R \notin \pi_P \cup \pi_T$

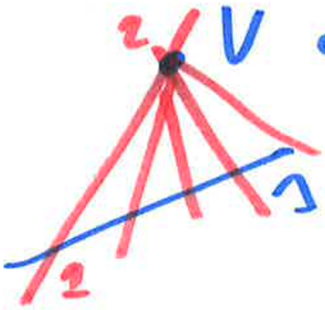
(esiste sempre perché la quadrica é irriducibile e dunque non é unione di 2 piani)

$\rightarrow$ per quanto visto prima R é iperbolico e applicando lo stesso ragionamento con R al posto di P e T al posto di R abbiamo T iperbolico.

$\square$

Teorema: Una quadrica Q è a punti parabolici $\Leftrightarrow$ Q è un cono o un cilindro.

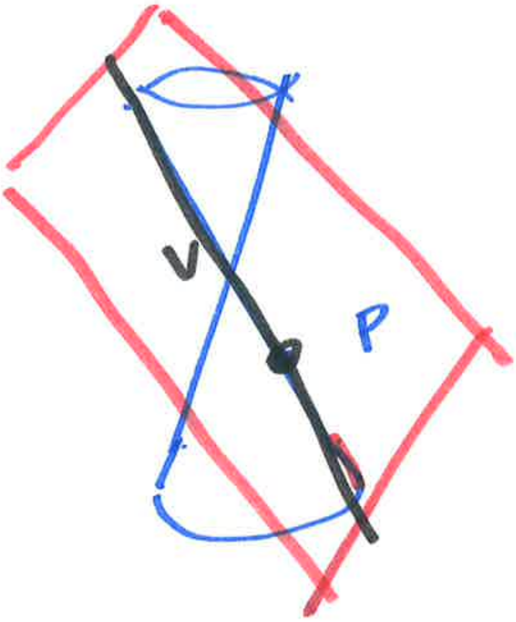
DIM: Sia Q cono o cilindro di vertice V. Allora ogni retta r contenuta in Q passa per V (perché altrimenti avremmo che tutto il piano che contiene V ed una retta s non per esso dovrebbe essere contenuto nella quadrica



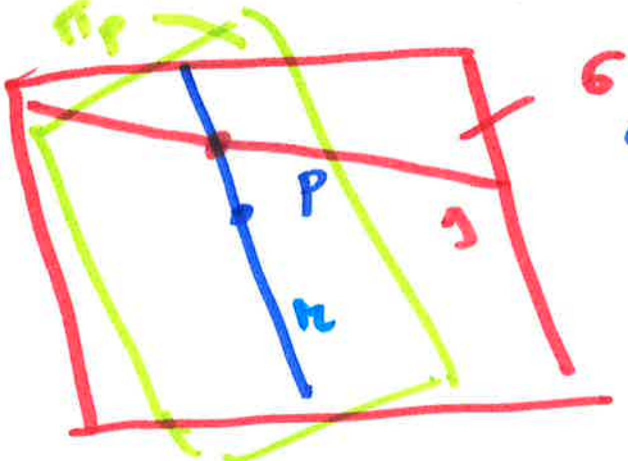
(in quanto ogni retta del fascio per V contenuto in questo piano interseca ≥ 3 volte e dunque è contenuta)).

In particolare se W è un punto semplice di Q $\Rightarrow$ l'unica retta per W contenuta in Q

è la retta $VW \Rightarrow \pi_W \cap Q$ è una retta reale contata 2 volte. $\Rightarrow W$ è parabolico.



Viceversa. Supponiamo $P \in Q$ punto parabolico. Allora $\pi_P \cap Q = r$ contata 2 volte. Sia σ un piano passante per r con $\sigma \neq \pi_P \Rightarrow r \subseteq \sigma$ e $\sigma \cap Q$ non può essere la sola retta r perché altrimenti σ sarebbe un piano tg. a Q in P diverso da π_P. Però σ interseca Q in una conica riducibile $\Rightarrow \sigma \cap Q = r \cup s$



OSS. poniamo $V = \pi \cap \sigma$ e vediamo che V ~~non~~ non può essere un punto semplice perché in V sia il piano π_p che il piano σ intersecano Q in una conica che ha V come punto doppio (ci sarebbero 2 piani tangenti!) $\Rightarrow V$ è punto doppio. Poiché la quadrica è irriducibile V è l'unico punto doppio e Q è un cono o un cilindro $\square$

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE IN FUNZIONE DELLA NATURA DEI LORO PUNTI SEMPLICI

- PARABOLICI $\Longleftrightarrow$ CONI O CILINDRI.
- IPERBOLICI $\Longleftrightarrow$ Generali e contengono RETTE. (in particolare ci devono essere punti reali all'∞).
  - IPERBOLOIDI
  - PARABOLOIDI.
- ELLITTICI $\Leftrightarrow$
  - IPERBOLOIDI
  - PARABOLOIDI
  - ELLISSOIDI.

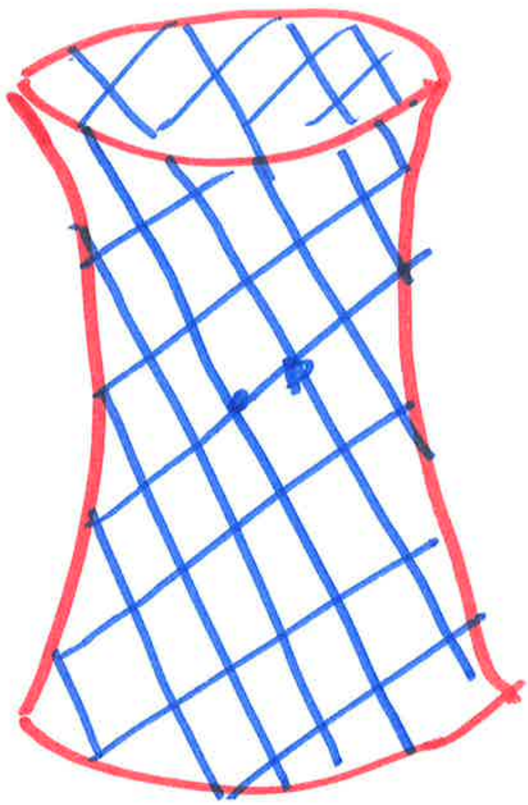
N.B Un ellissoide non ha punti reali all'∞ $\Rightarrow$ non può contenere rette reali $\Rightarrow$ è necessariamente a punti ellittici.

OSS: Un paraboloide può essere ellittico o iperbolico.
I due casi si possono distinguere considerando la sua $\mathcal{C}_\infty$ in quanto un paraboloide è tg. al piano improprio.

→ Se la $\mathcal{C}_\infty$ sono 2 rette reali e distinte
⇒ il paraboloide è iperbolico

→ Se la $\mathcal{C}_\infty$ ha un unico punto reale ⇒
il paraboloide è ellittico.

per gli iperboloidi bisogna fare i conti su di una sezione tg.



Si dimostra che dato un iperboloide iperbolico esistono 2 famiglie di rette in uno contenute con le seguente proprietà:

1) tutte le rette che appartengono alla stessa famiglia sono sghembe fra loro
2) tutte le rette di una famiglia intersecano

tutte le rette dell'altra famiglia.

—

piano per $[(1100)]$ $[(0100)]$

$x_4=0$

$x_3=0$

piano proprio.

$z=0$

chiediamo un piano la cui giacitura sia generata da $(1,2,0)$ e $(0\,1\,0)$.

$$ax+by+cz+d=0$$

con $(a\ b\ c)\cdot(1\,2\,0)=0$

$(a\ b\ c)\cdot(0\,1\,0)=0$

$b=0 \quad a=0$

$z+d=0$

prendo reale per il punto

$[(1\ i\ 0\ 0)]$

$\downarrow$

deve passare anche per

$[(1, -i\ 0\ 0)]$

$\alpha X_3 + \beta x_4 = 0$

$z + d = 0$