Quadriche

Curve del II ordine in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$
algebriche
$PG(2, \mathbb{R})$

Superfici algebriche reali del II ordine in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \widetilde{\mathcal{E}_3(\mathbb{C})}$

Def: In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si dice superficie algebrica il luogo dei punti le cui coordinate in un riferimento fissato soddisfano una equazione $f(x, y, z) = 0$

con f polinomio non costante.

Indicheremo questo luogo con

$$\mathcal{V}(f) = \{ P \equiv (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0 \}.$$

Al polinomio $f(x, y, z)$ è associato un polinomio omogeneo

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_4^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_4}\, \frac{x_2}{x_4}\, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

e consideriamo

$$\tilde{\mathcal{V}}(F) = \{[(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)] \mid F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0\}.$$

$$\tilde{\mathcal{V}}(F) \subseteq \widetilde{\mathcal{E}_3(\mathbb{C})}$$

possiamo quindi considerare nuovamente i punti impropri come i punti di $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ che non sono punti di $\mathcal{V}(f)$.

Teoremi dell'ordine.

- I teorema dell'ordine:

  Sia $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ una sup. algebrica di ordine n $\Rightarrow$ ogni piano interseca $\tilde{\mathcal{V}}(F)$ in una curva di ordine n a meno che esso non sia contenuto in $\tilde{\mathcal{V}}(F)$.

DIM: sulla falsariga di quella del teorema d. ordine per le curve.

II teorema dell'ordine:

Sia $\tilde{V}(F)$ una sup. algebrica di ordine $n \Rightarrow$ ogni retta dello spazio non contenuta in $\tilde{V}(F)$ interseca $\tilde{V}(F)$ in n punti.

• DIM osservando che ogni retta* è interse. di 2 piani distinti + I teorema dell'ordine

ALTERNATIVAMENTE.
come il teorema d. ordine per le curve.

Quadriche: sup. algebriche reali piane del II ordine.

$$F(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2$$

$\rightarrow$ costruite una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \\ a_{14} & & a_{44} \end{pmatrix}$

simmetrica che è associata alla quadrica.

Def: Sia Q una ~~quadr~~ sup. algebrica.
Allora un punto P è detto <u>multiplo</u> per Q se ogni retta per P interseca Q in P almeno $t>1$ volte.
Un punto $P\in Q$ per cui $\exists$ una retta che interseca Q in P esattamente una volta è detto <u>semplice</u>.

Sia P un punto semplice di una quadrica Q e π un piano per P.
$\Rightarrow$ π è detto <u>piano tangente</u> a Q in P se $Q\cap\pi$ è una conica per cui P è un punto doppio.

OSS: Se Q è la quadrica di eq.

$$ {}^tXAX=0 $$

e $P=[{}^t(p_1\ p_2\ p_3\ p_4)]$ $\quad X=[{}^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)]$

$\Rightarrow$ il piano tg. a Q in P ha eq.

$$ {}^tPAX=0 $$

DIM: Come per le coniche.

In particolare anche per le quadriche si può definire una nozione di coniugio fra punti e 2 punti sono coniugati $\iff$ sono ortogonali rispetto il prod. scalare definito da A, ed un punto è autoconiugato $\iff$ appartiene alla quadrica ed in tale caso il luogo dei suoi coniugati (se è semplice) è proprio il piano tg. per esso.

<u>OSS</u> 1) Anche per le quadriche, considerando che un pto è doppio $\iff$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_4}\right|_P = F(P) = 0$$

si vede che i punti doppi sono tutti e soli quelli che hanno coord. omogenee che sono contenute in Ker(A).
cioè le cui coord. omogenee sono classi di autosoluzioni di $AX = \underline{0}$.

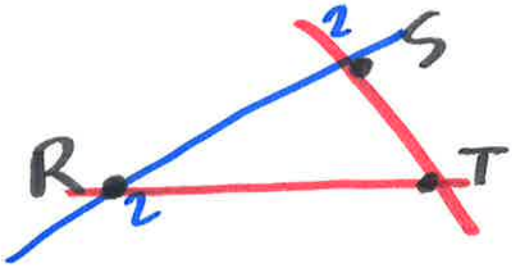
2) Una quadrica, se è riducibile, si riduce nell'unione di 2 piani.

Def: Una quadrica si dice

- **generale** se priva di pti doppi
- **singolare** se essa ha almeno un pto doppio.
- **riducibile** se essa si può scrivere come unione di 2 piani (reali e distinti; immag. e coniugati; reali e coincidenti)

Teorema: Una quadrica Q è riducibile $\Leftrightarrow$ essa ha almeno 2 punti doppi (e conseguentemente ne ha $\geq \infty^1$).

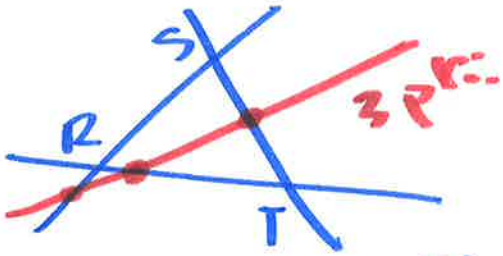
DIM: Sia Q una quadrica e supponiamo che Q abbia almeno 2 punti doppi R, S.



Allora la retta $RS \subseteq Q$ in quanto interseca Q almeno 4 volte (2 in R e 2 in S).

Sia $T \in \mathcal{Q} \setminus RS \Rightarrow$ le rette RT ed ST intersecano $\mathcal{Q}$ almeno 3 volte (2 in R, S ed una in T) $\Rightarrow RT, ST \subseteq \mathcal{Q}$.

DA questo deduciamo che il piano π che contiene R, S, T interseca $\mathcal{Q}$ almeno in 3 rette distinte $\Rightarrow$ interseca $\mathcal{Q}$ in una "curva" che ha almeno ordine 3

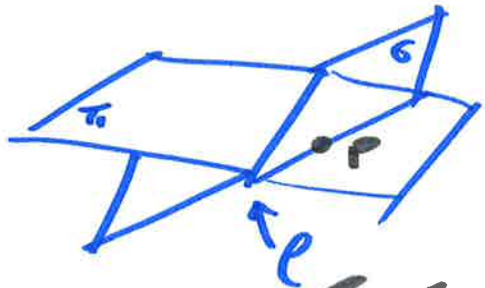


$\Rightarrow$ per il I teorema dell'ordine il piano $\pi = \langle R, S, T \rangle$ deve essere componente di $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è riducibile. #

Viceversa: Sia $\mathcal{Q}$ riducibile.

$\Rightarrow \mathcal{Q} = \pi \cup \sigma$ con π, σ piani.

poniamo $\ell = \pi \cap \sigma$



OSSERVIAMO CHE OGNI PUNTO DI ℓ È DOPPIO.

infatti sia $P \in \mathcal{Q}$ e r una retta per P. Supponiamo che r interseschi $\mathcal{Q}$ in almeno un altro punto $S \neq P$
$\Rightarrow S \in \pi$ oppure $S \in \sigma$, ma in questi casi $PS \subseteq \mathcal{Q}$.
Quindi la "generica" retta per P interseca $\mathcal{Q}$ solo in $P \Rightarrow P$ è un punto doppio. $\square$

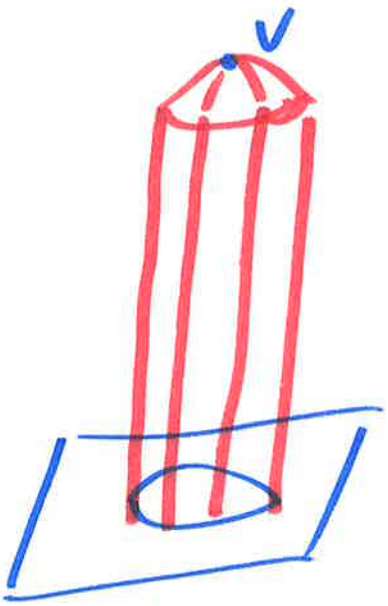
prima classificazione

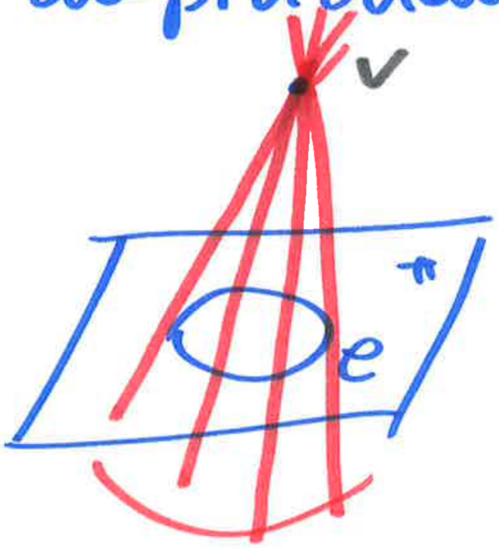
	rk(A)	$\mathcal{Q}$	P.ti doppi
	4	generale	0
singolare	3	cono/cilindro	1
singolare, riducibile	2	unione di 2 piani $\neq$	∞^1
singolare, riducibile	1	2 piani coincidenti	∞^2

Def Si dice cono (cilindro) di vertice V e direttrice $\mathcal{C}$ il luogo dei punti che stanno sulle rette passanti per V ed un punto di $\mathcal{C}$.

ove $\mathcal{C}$ è una conica generale ~~di~~ in un piano π con $V \notin \pi$ e V è un punto proprio per il cono ed improprio per il cilindro.

→ luogo delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V.

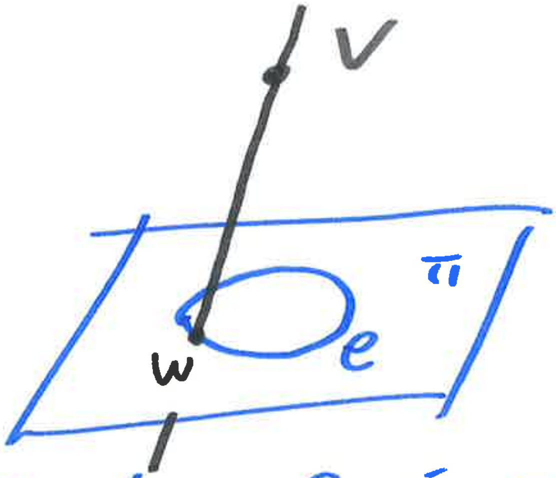




<u>Teorema</u>: Una quadrica $\mathcal{Q}$ è un cono o un cilindro $\Longleftrightarrow$ essa ha esattamente un punto doppio e tale punto è il suo vertice.

<u>DIM</u>: Se abbiamo >1 punti doppi la quadrica è riducibile e dunque non è un cono o un cilindro.

Supponiamo $\exists! V \in \mathcal{Q}$ punto doppio.



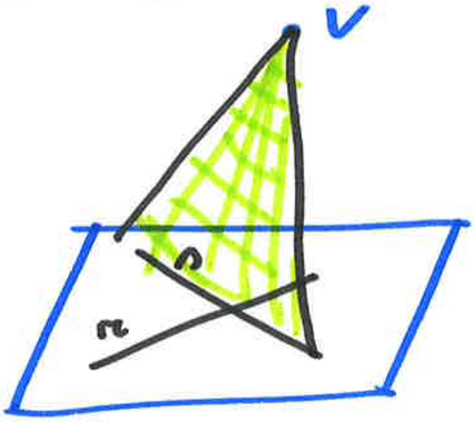
e sia π un piano non passante per V.

pongo $\mathcal{C} = \pi \cap \mathcal{Q}$

In particolare $\mathcal{C}$ é una conica.
(perché $\mathcal{Q}$ irriducibile $\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ non contiene piani).

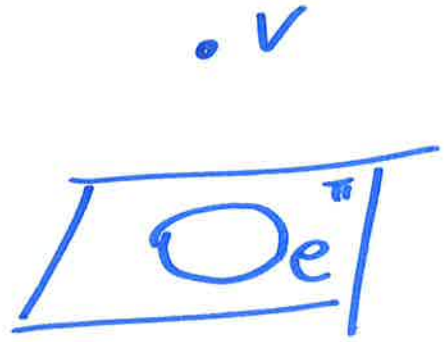
Sia adesso $W \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ la retta VW interseca $\mathcal{Q}$ almeno 3 volte $\Rightarrow$ la retta VW é contenuta in $\mathcal{Q}$.

Se $\mathcal{C}$ fosse una conica non generale $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ sarebbe riducibile nell'unione di 2 rette $\Rightarrow$
r ∪ s



per quanto visto prima ogni retta per V ed un punto di r sarebbe contenuta nella quadrica $\Rightarrow$ la quadrica conterrebbe un piano

$\Rightarrow$ sarebbe riducibile $\Rightarrow$ ASSURDO perché in quel caso i punti doppi dovrebbero essere almeno 2.



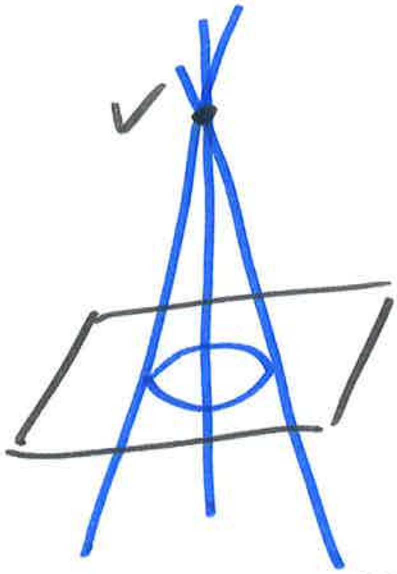
ABBIAMO VISTO 1) se $V \notin \pi \Rightarrow Q \cap \pi = \mathcal{C}$ conica generale

2) $\forall W \in \mathcal{C}$, $VW \subseteq Q$

ci manca far vedere che questi sono tutti i punti della Quadrica.

Supponiamo $R \in Q \setminus V$. Allora la retta RV deve essere contenuta nella quadrica $\Rightarrow$ essa deve intersecare il piano π in un punto della quadrica, cioè in un punto di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ RV è una delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V $\Rightarrow$ Q è un cono o un cilindro.

Viceversa: Sia Q un cono o un cilindro di vertice V.



e consideriamo una retta per V. Se questa retta interseca Q in un punto X diverso da V

$\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{C}$ tale che $PX = PW$ come retta $\Rightarrow$ la retta è contenuta in Q.

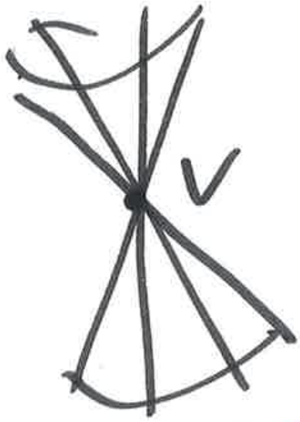
Ne segue che le rette ~~da~~ "generiche" per V devono intersecare Q due volte nel vertice $\Rightarrow V$ è doppio $\square$.

CLASSIFICAZIONE DI CONI/CILINDRI.

- ~~CILINDRI~~: CONI
  1) $\mathcal{C}$ è a punti reali
  2) $\mathcal{C}$ è priva di punti reali.

1) cono a falda reale
2) cono a falda immaginaria (l'unico punto reale è il vertice).

Studiamo le sez. piane di un cono a falda reale. Q.

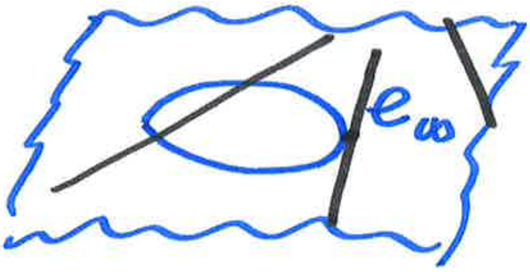


consideriamo innanzi tutto

$Q \cap \pi_\infty = \mathcal{C}_\infty$.

↑ piano improprio

poiché $\mathcal{C}_\infty \not\ni V$, $\mathcal{C}_\infty$ è una conica generale.



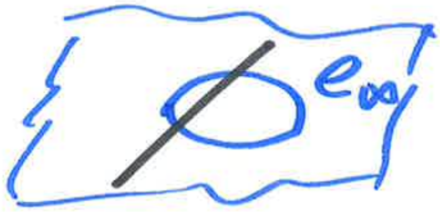
Un piano σ interseca Q o in una conica degenere (nel qual caso esso passa per V). ~~esso~~ o in una conica generale i cui punti impropri sono dati da $\sigma \cap \mathcal{C}_\infty$

poiché $\mathcal{C}_\infty$ é una conica generale.

$(\pi_\infty \cap \sigma) \cap \mathcal{C}_\infty$ può consistere di

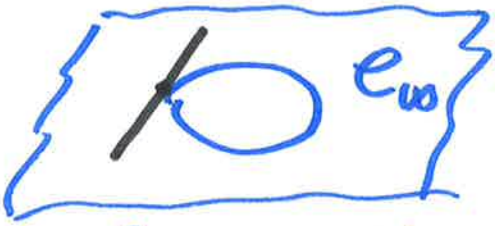
retta

2 punti reali e distinti



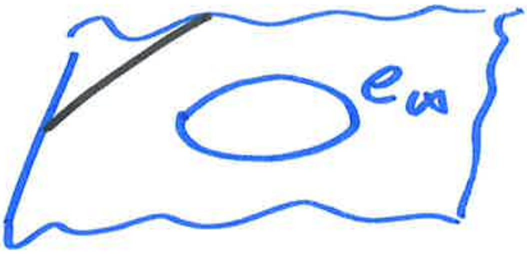
$\Rightarrow$ la conica $\sigma \cap Q$ é una iperbole

2 punti reali e coincidenti



$\Rightarrow$ la conica $\sigma \cap Q$ é una parabola

2 punti imm. e coniugati



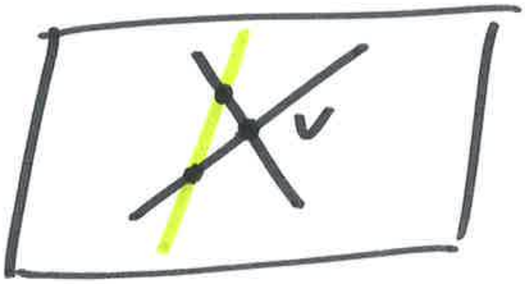
$\Rightarrow$ la conica $\sigma \cap Q$ é una ellisse.

Tutti e 3 i tipi di coniche generali possono nascere come intersezioni di un cono reale con un piano.

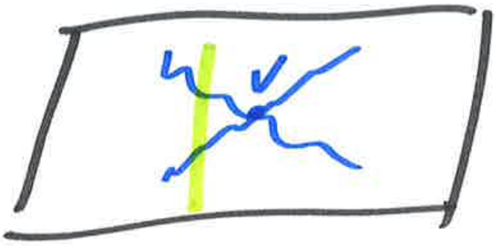
Cilindro Q. $V \in \pi_\infty$

$\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$ é una conica irriducibile

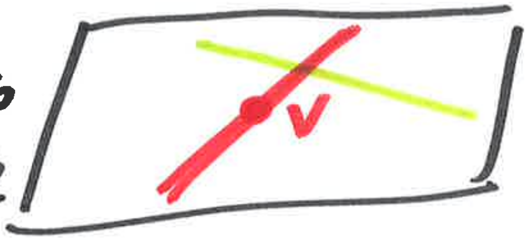
Ogni piano proprio che interseca Q ~~ha una~~ conica generale lo incontra in una conica con 2 pt. impropri reali. ⇒ IPERBOLE



2 pt. impropri immaginari ⇒ ELLISSE



1 pto improprio contato 2 volte. ⇒ PARABOLA



Quadriche generali → prive di punti doppi.

→ si studia la $\mathcal{C}_\infty = Q \cap \pi_\infty$

→ si studia anche la natura dei punti perché ci sono quadriche con la stessa $\mathcal{C}_\infty$ ma che sono differenti!!

Def: Una quadrica generale Q è detta.

- iperboloide se la sua $\mathcal{C}_\infty$ è irriducibile a punti reali.
- paraboloide se la sua $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile ($\Rightarrow$ tg al piano improprio).
- ellissoide se la sua $\mathcal{C}_\infty$ è irriducibile e priva di punti reali ($\Rightarrow$ a punti immaginari e coniugati).

A matrice della quadrica.

Si studia $\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ e si vede cosa si ottiene.

posto $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

si vede che $\mathcal{C}_\infty$ é riducibile $\iff$

$\det A^* = 0$

per iperboloidi ed ellissoidi bisogna vedere se ci sono punti reali all'infinito.

$\downarrow$

in particolare bisogna vedere se la restrizione del prod. scalare indotto da A^* sul piano improprio é definita positiva o definita negativa ($\Rightarrow$ NON CI SONO PUNTI REALI).

oppure no.

↳ si verifica studiando i segni degli autovalori di A.

→ Se tutti e 3 gli autovalori di A hanno il medesimo segno $\Rightarrow$ forma definita $\Rightarrow$ NON CI SONO PTI REALI $\Rightarrow$ Ellissoide.

→ Se 2 sono di segno diverso $\Rightarrow$ IPERBOLOIDE.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ & \cdots & a_{33} \end{pmatrix}.$$

OSSERVO CHE A MENO DI UN CAMB. DI RIFERIMENTO IL PROD. SCAL INDOTTO DA A^* È LO STESSO DI QUELLO INDOTTO DA

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

matrice ottenuta diagonalizzando ortogonalmente A^*

$\rightarrow$ esistono punti $[(x_1\ x_2\ x_3)]$ con

$$(x_1\ x_2\ x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (x_1 x_2 x_3) \neq (0\,0\,0)$$

$\Leftrightarrow$ ci sono punti

$$(x_1'\ x_2'\ x_3')\, D \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = 0 \text{ con } (x_1' x_2' x_3') \neq (0\,0\,0)$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = 0$

ammette soluzioni reali.

Def: Sia Q una quadrica irriducibile.
e sia $P \in Q$ un suo punto semplice
Allora P é detto

- **iperbolico** se l'intersezione di Q con il piano tg per P é unione di 2 rette reali e distinte.
- **parabolico** se l'intersezione di Q con il piano tg per P é una retta contata 2 volte.
- **ellittico** se l'int. di Q con il pn tg per P é unione di 2 rette imm. e coniug.

Teorema: Sia Q una quadrica irriducibile.
Allora tutti i punti semplici di Q hanno la stessa natura.

(in particolare se $\exists$ un punto ellittico $\Rightarrow \forall$ punto é ellittico; etc. etc.).

OSS: Un ellissoide $\mathcal{E}$ é una quadrica a punti ellittici.

DIM: se ci fosse un pto parabolico o iperbolico $\Rightarrow \mathcal{E}$ conterrebbe almeno una retta reale e dunque $\mathcal{E}$ non dovrebbe conterrebbe almeno un punto reale (= il punto improprio di questa retta) ↯ impossibile perché $\mathcal{E} \cap \pi_\infty$ non ha punti reali.

<u>Teorema</u>: Le quadriche a punti parabolici sono i coni e i cilindri.