Punti multipli.

$\overbrace{AG(2, \overline{\mathbb{K}})}$ $\qquad$ $PG(2, \overline{\mathbb{K}})$

$\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$

Una curva algebrica è l'insieme di punti $\widetilde{V}(F)$ di $PG(2, \overline{\mathbb{K}})$ tali che

$F(x_1, x_2, x_3)$ sia un polinomio omogeneo non nullo.

Def: Una curva algebrica è irriducibile se non esistono G, H polinomi tali che

$$\widetilde{V}(F) = \widetilde{V}(G) \cup \widetilde{V}(H)$$

(ovvero se non è unione di altre due curve algebriche).

In generale

$$\boxed{V(G \cdot H) = V(G) \cup V(H)}$$

Supponiamo $\tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \cup \tilde{V}(H)$

e che $\tilde{V}(G)$ sia irriducibile.

Allora $G(x_1\, x_2\, x_3)$ divide

$F(x_1\, x_2\, x_3)$.

Cioè $F(x_1\, x_2\, x_3) = G(x_1\, x_2\, x_3) H'(x_1\, x_2\, x_3)$.

$\mathcal{C}: \quad (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 0$

$r_0: \quad (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$

$r = V(x_1 + x_2 + x_3) \cup V(x_1 + x_2 + x_3)$

~~$V(\mathcal{C}) = V(r) \cup$~~

$\mathcal{C} = r \cup \tilde{V}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$

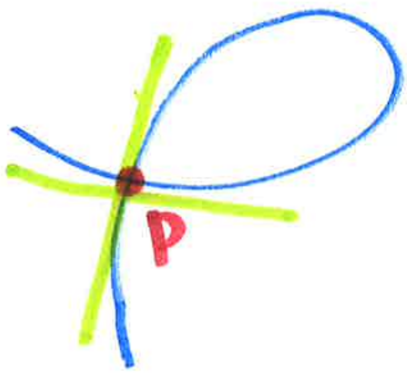
il polinomio che descrive r

non divide l'equazione di $\mathcal{C}$.

GEOMETRIA	ALGEBRA
UNIONE DI CURVE	PRODOTTO DI POLINOMI
INCLUSIONE	DIVISIBILITÀ

Def: Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica di ordine n. Si dice che $P \in \mathcal{C}$ è un punto r-uplo per $\mathcal{C}$ se $\forall$ retta s del piano passante per P interseca $\mathcal{C}$ in P $\geq r$ volte e ci sono esattamente r rette per P che intersecano $\mathcal{C}$ in esso $r+1$ volte (con le debite molteplicità).

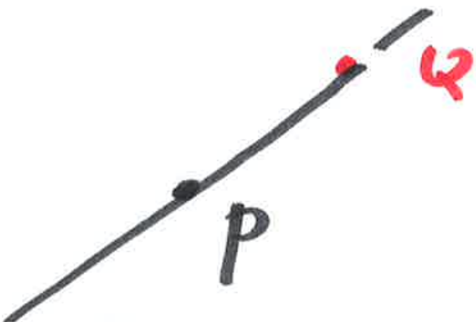
$r=2 \Rightarrow$ punto doppio



Teorema: Una curva $\mathcal{C}$ di ordine n non ha punti $(n+1)$-upli.
Se essa ha un punto n-uplo P $\Rightarrow$ si spezza nell'unione di n rette passanti per P.

DIM: • Se $P \in \mathcal{C}$ fosse $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ ogni retta per P intersecherebbe $\mathcal{C}$ $(n+1)$ volte $> n$ $\Rightarrow$ sarebbe contenuta in $\mathcal{C}$ $\lightning$.

• $n=2$. Sia $\mathcal{C}$ una curva del II ordine e $P \in \mathcal{C}$ doppio.
Allora $\forall Q \in \mathcal{C}$, la retta $\overline{PQ}$ interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte
$\Rightarrow PQ \subseteq \mathcal{C}$.



In particolare l'eq. di PQ divide

l'equazione

$$F(x_1 x_2 x_3)=0$$

di $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \underbrace{F(x_1 x_2 x_3)}_{\substack{\text{eq. di } \mathcal{C} \\ \deg=2}} = \underbrace{G(x_1 x_2 x_3)}_{\substack{\text{eq. di } r=\overline{PQ} \\ \deg=1}} \underline{H(x_1 x_2 x_3)}$$

$\deg = 1$

$\Rightarrow$ è l'eq. di una retta.

- $n-1 \Rightarrow n$

Sia $\mathcal{C}$ di eq. $F(x_1 x_2 x_3)=0$ $\deg F = n$

P punto n-uplo; $Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\}$.

la retta $\overline{PQ}$ è contenuta in $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ posto $G(x_1 x_2 x_3)=0$ eq. di $\overline{PQ}$ si vede

$$\underset{n}{F(x_1 x_2 x_3)} = \underset{1}{G(x_1 x_2 x_3)} \, \underset{n-1}{H(x_1 x_2 x_3)}$$

osserviamo che P é punto $(n-1)$-uplo per $V(H)$ e quindi per ipotesi induttiva $V(H)$ é unione di $n-1$ rette e quindi é unione di $n-1+1=n$ rette

#

[in questo caso una generica retta per P interseca $\tilde{V}(G)$ 1 sola volta in P ed il resto delle int. devono essere in $\tilde{V}(H)$]

#

Curve algebriche del I ordine
↓
rette.

Curve algebriche del II ordine.

$$\boxed{\begin{aligned} F(x_1\, x_2\, x_3) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 \end{aligned}} \quad (*)$$

Def: Si dice conica una curva algebrica reale piana del secondo ordine.

Curva algebrica: $\mathcal{C} = \tilde{V}(F)$

con $F(x_1 x_2 x_3)$ polinomio.

reale: $F(x_1 x_2 x_3)$ é a coeff. in $\mathbb{R}$

piana: contenuta in $PG(2, \mathbb{C})$.

(se fossimo anche in $PG(n, \mathbb{C})$, vuol dire $\exists \pi$ piano con $\mathcal{C} \subseteq \pi$).

secondo ordine: il polinomio $F(x_1 x_2 x_3)$ ha grado 2.

DOMANDA: Quante sono le coniche?

6 coeff. $\Rightarrow$ sono ∞^5 perché sono def. a meno di proporzionalità.

$\rightarrow$ In generale per 5 punti passa una e una sola conica (a meno che non siano allineati).

→ Si vede impostando il sistema per trovare $a_{11} \dots a_{33}$ date le coordinate dei punti.

Def: Una conica è detta <u>generale</u> se essa è priva di punti doppi; <u>sempl. degenere</u> se essa ha esattamente un punto doppio; <u>doppiamente degenere</u> se essa ha almeno 2 punti doppi.

Teorema: Una conica è semplicemente degenere $\Leftrightarrow$ essa è unione di 2 rette reali e distinte o imm. e coniugate; è doppiamente degenere $\Leftrightarrow$ è una retta contata 2 volte.

DIM

1) Se $\mathcal{C}$ conica con ≥ 1 punto doppio

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è unione di 2 rette.

→ se le rette non sono reali il prodotto delle loro equazioni deve essere una equazione a coeff. reali.

Cioè se $G(x_1\, x_2\, x_3) \neq \bar{G}(x_1\, x_2\, x_3)$

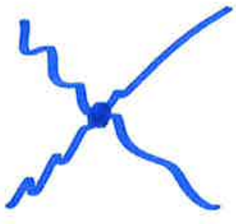
e non prop.

$\Rightarrow G \mid F(x_1\, x_2\, x_3) \Rightarrow \bar{G} \mid F(x_1\, x_2\, x_3)$

$\Rightarrow F(x_1\, x_2\, x_3) = G(x_1\, x_2\, x_3) \cdot \bar{G}(x_1\, x_2\, x_3)$

Una conica degenere è

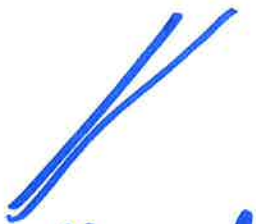
unione di 2 rette reali



unione di 2 rette imm. coniugate

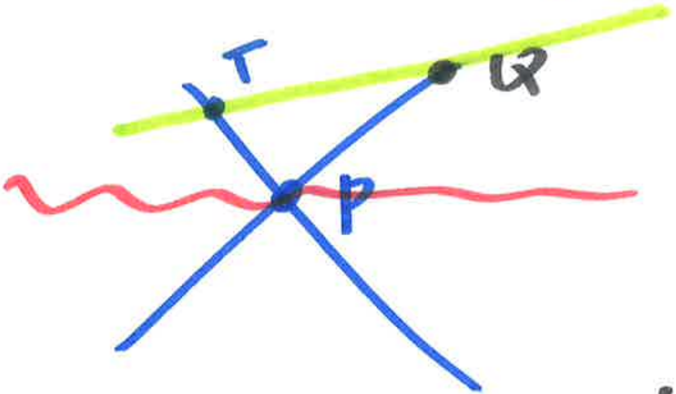
⇓

$\exists!$ punto reale



retta reale contata 2 volte.

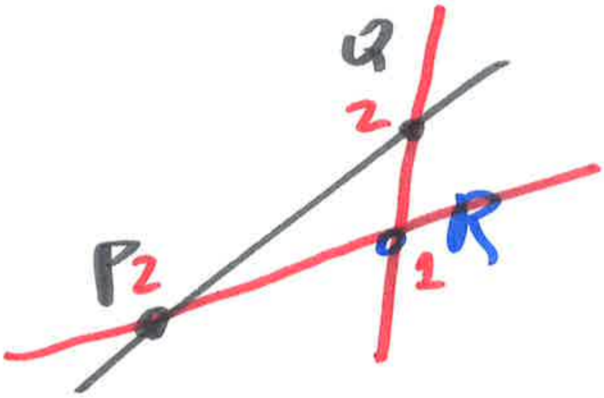
Supponiamo $\mathcal{C} = r \cup s$ con $r \neq s$
e poniamo $P = r \cap s$.
Allora P é l'unico punto doppio di $\mathcal{C}$.



osserviamo che se t é una retta che passa per P ed un altro punto Q di $\mathcal{C}$ con $Q \neq P \Rightarrow$ $Q \in r$ oppure $Q \in s \Rightarrow t = r$ oppure $t = s$. Quindi ogni retta t per P diversa da r, s interseca $\mathcal{C}$ solamente in $P \Rightarrow P$ é doppio.

Sia $Q \in (r \cup s) \setminus \{P\}$. $\Rightarrow$ se $Q \in r$ prendiamo $T \in s$ con $T \neq P$ e vediamo che $QT \not\subset \mathcal{C}$ ed interseca $\mathcal{C}$ in 2 punti $\Rightarrow Q$ é semplice. Idem se $Q \in s$.

Supponiamo che $\mathcal{C}$ abbia 2 punti doppi, P, Q



se esistesse $R \in \mathcal{C} \setminus \overline{PQ}$, consideriamo le 3 rette PQ, PR, RQ.

PQ interseca $\mathcal{C}$ almeno 4 volte $\Rightarrow$

$$PQ \subseteq \mathcal{C}.$$

PR interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte (2 in P ed 1 in R) $\Rightarrow$ $PR \subseteq \mathcal{C}$.

RQ interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte (2 in Q ed 1 in R) $\Rightarrow$

$$RQ \subseteq \mathcal{C}.$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ contiene almeno 3 rette distinte.

$\Rightarrow$ $\not\exists$ perché $\mathcal{C}$ dovrebbe avere eq. di grado almeno 3 (ma $\mathcal{C}$ è una conica!).

N.B: Sia $\mathcal{C}$ una conica
Abbiamo visto che

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ DEGENERE} \Leftrightarrow \mathcal{C} \text{ RIDUCIBILE}}$$

Sia $\mathcal{C}$ una conica e (*) la sua equazione.

poniamo $X = {}^t(x_1\ x_2\ x_3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ed osserviamo che (*) si riscrive come

$$ {}^tXAX = 0 $$

la matrice A è reale e simmetrica e si dice matrice della conica $\mathcal{C}$.

Essa definisce un prodotto scalare
$$\cdot_{\mathcal{C}} \begin{cases} \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) \longrightarrow {}^t X A Y. \end{cases}$$

e la corrispondente ortogonalità $\perp_{\mathcal{C}}$.

Sia adesso $P \in \widetilde{AG(2,\mathbb{R})}$. $P = [(p_1\ p_2\ p_3)]$. chiamo <u>polare</u> di P (rispetto a $\mathcal{C}$) la retta $r_0 = P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ cioè la retta di equazione

$$r_0 : \quad [(p_1, p_2, p_3)] A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

(è un sott. di $\mathbb{K}^3$ di dim 2 → retta proiettiva a patto che $A\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$)

Il punto P è detto polo di r_0.

e per le proprietà dei prodotti scalari $P \in r_0^{\perp}$ visto che $r_0 = P^{\perp}$.

Come calcolare i punti doppi.

- Curva algebrica $\mathcal{C}$ di eq.

  $F(x_1\ x_2\ x_3) = 0$.

  e $P \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ 1) ~~la retta tg. a $\mathcal{C}$ in P ha eq.~~

1) P é doppio se e solo se

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P = \left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P = 0$$

2) se P é semplice la retta tg. a $\mathcal{C}$ in P ha eq.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P x_1 + \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P x_2 + \left.\frac{\partial F}{\partial x_3}\right|_P x_3 = 0$$

ove 1) per retta r_3 si intende la retta per P che interseca $\mathcal{C}$ in P almeno 2 volte.

2) per $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ si intende la formula derivata parziale di F rispetto x_1, cioè

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = \sum_{i+j\leq n} f_{ij}\, x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} := \sum_{i+j\leq n} f_{ij}\, i\, x_1^{i-1} x_2^j x_3^{n-i-j}$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3$$

→ DA QUESTO VEDIAMO CHE I PUNTI DOPPI DI $\mathcal{C}$ SONO TUTTI E SOLI I PUNTI le cui coord. omogenee sono autosoluzioni di

$$2A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underline{0}$$

→ In altre parole, i punti doppi di $\mathcal{C}$ corrispondono ai punti le cui coord. omogenee sono contenute in Ker(A).

→ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ è una conica generale.

Se $\ker(A) = \{0\}$ ovvero $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow \forall P \in \widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ $P^\perp$ è una retta r

e viceversa se r è una retta

$r^\perp = Q$ è un punto.

Il punto $r^\perp$ è detto polo di r.

Sia adesso $P \in \widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ tale che

$P \in P^\perp$ (cioè un punto che

appartiene alla propria polare).

$$\Rightarrow (p_1\ p_2\ p_3) \circ_{\mathcal{C}} (p_1\ p_2\ p_3) = 0$$

$$\Rightarrow (p_1\ p_2\ p_3) A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow P \in \mathcal{C}.$$

~~In~~ pratica

Def Si dice che P e Q sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}$ se $P \in Q^\perp$ (ovvero $Q \in P^\perp$).

I punti autoconiugati sono quelli tali che $P \in P^\perp$. Essi sono tutti e soli i punti della conica.

prodotti scalari	coniche.
ORTOGONALITÀ	CONIUGIO
ISOTROPI	AUTOCONIUGATI
SOTT. ORTOGONALE	POLARE/POLO

Teorema (di reciprocità).
Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e P un punto, $p = P^\perp$ la sua polare.

allora le polari dei punti di p sono rette per P ed i poli delle rette per P appartengono a p

~~DIM Sia $X \in p \Rightarrow X \in P^{\perp} \Rightarrow p^{\perp\perp} \subseteq X^{\perp}$ e $p^{\perp\perp} = p$.~~

Sia $X \in p \Rightarrow X \in P^{\perp} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{\perp\perp} \subseteq X^{\perp} \Rightarrow P \in X^{\perp}$$

(le polari dei punti di p passano per P).

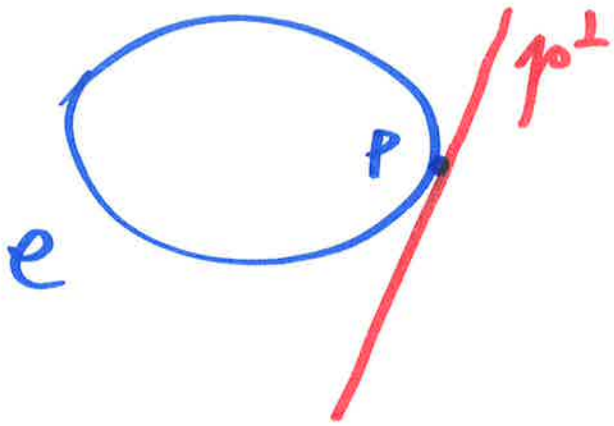
Viceversa: Sia r tale che

$$P \in r \Rightarrow r^{\perp} \subseteq P^{\perp} = p$$

$\Rightarrow$ i poli delle rette per P stanno in r. $\square$

Teorema: Sia $P=(p_1\ p_2\ p_3)\in\mathcal{C}$ un punto di una conica di matrice A.
Allora $P^{\perp}$ (la polare di P) è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P.

(formula di sdoppiamento).



$$(p_1\ p_2\ p_3)\,A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

DIM: vari modi $\to$ si può anche verificare direttamente.

Sia A la matrice della conica

$$P=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}$$

consideriamo le intersezioni di $\overline{PQ}$ con $\mathcal{C}$.

$$ {}^t\left[\alpha\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}\right] A \left[\alpha\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}\right. $$

$$ = 0 $$

$$ \alpha^2 (x_1'\; x_2'\; x_3') A \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix} + \beta^2 (x_1''\; x_2''\; x_3'') A \begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix} + $$

$$ + 2\alpha\beta\,(x_1'\; x_2'\; x_3') A \begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix} = 0 $$

Supponiamo la retta già tg.

$$ \Rightarrow \cancel{\Delta = \alpha^2\beta^2 A (x_1'\; x_2'\; x_3') \dots} $$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{h} = 0$$

$$\left[(x_1' \; x_2' \; x_3') A \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}\right]^2 - \boxed{(x_1' \; x_2' \; x_3') A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \cdot (x_1'' \; x_2'' \; x_3'') A \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}} = 0$$

se il punto $P = [(x_1' \; x_2' \; x_3')] \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ il termine in verde è $= 0$

$\Rightarrow$ la condizione che Q sia sulla retta tangente per P a $\mathcal{C}$ diviene

$$(x_1' \; x_2' \; x_3') A \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $Q \in P^\perp$

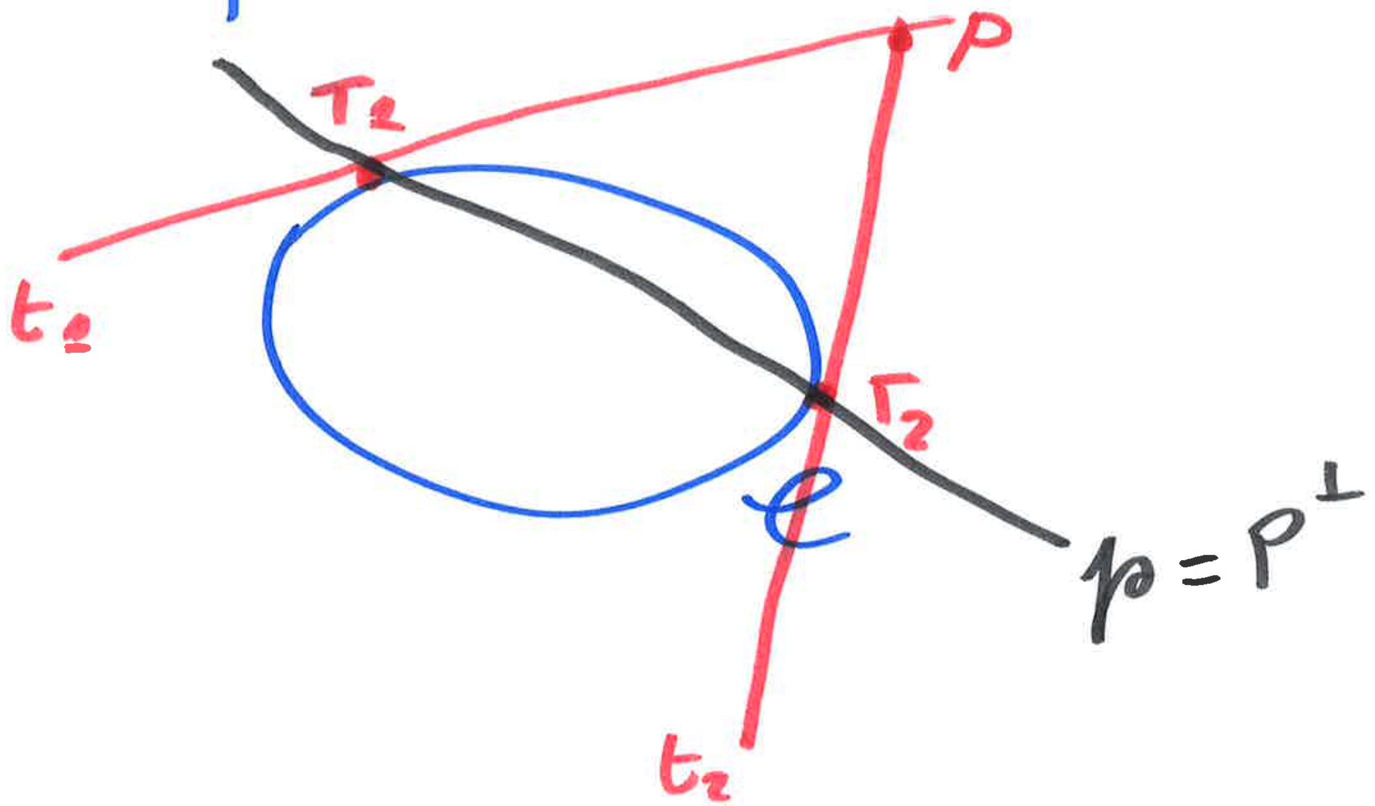
$\square$

Conseguenza.

Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e P un punto.

Se $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp}$ è la retta tg a $\mathcal{C}$ in P.

Se $P \notin \mathcal{C} \Rightarrow P^{\perp}$ è la retta che interseca $\mathcal{C}$ nei 2 punti di tangenza delle rette tg per P a $\mathcal{C}$.



DIM: Supponiamo $P \notin \mathcal{C}$.

Siano t_1, t_2 le tangenti per P a $\mathcal{C}$ e T_1, T_2 i rispettivi punti di tangenza.

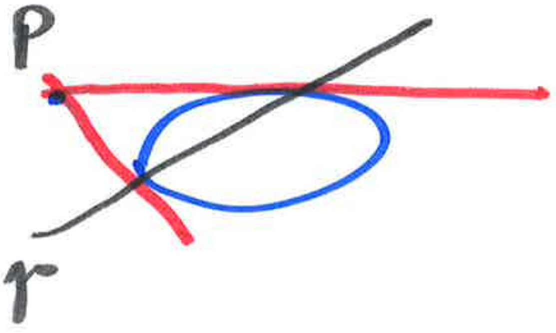
Allora la polare di T_1 è la tg in T_1 a $\mathcal{C}$ cioè t_1.

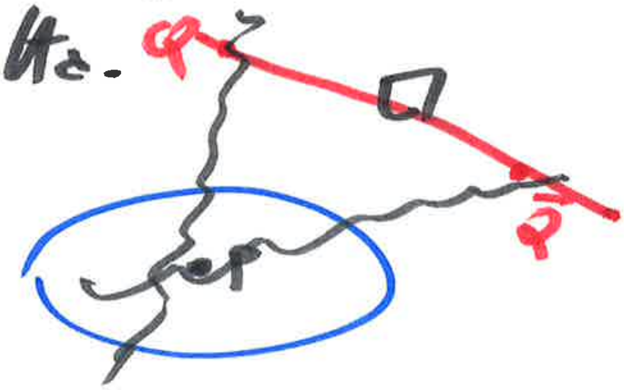
Idem per T_2 e t_2.

In particolare $P \in T_1^\perp \cap T_2^\perp$

$\Rightarrow T_1 \in P^\perp$ e $T_2 \in P^\perp$. Poiché $P^\perp = p$ è una retta e $T_1 \neq T_2$

$\Rightarrow p = \overline{T_1 T_2}$ dato che per 2 punti distinti passa una e una sola retta.





OSS: Sia $Q \in \overline{AG(2,\mathbb{C})}$ un punto immaginario. Allora $\exists!$ retta reale r_0 con $Q \in r$.

DIM: se r_0 reale e $Q \in r \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{Q} \in r_0 \Rightarrow r_0 = Q\bar{Q}$.
D'altro canto $\bar{r}_0 = \overline{Q\bar{Q}} = \bar{Q}Q = r_0$
$\Rightarrow r$ reale $\square$

Se un punto è "interno" ad una conica $\Rightarrow$ le 2 tangenti per esso sono 2 rette imm. coniugate. Esse intersecano la conica in 2 punti immaginari e coniugati $\Rightarrow$ la retta che congiunge tali punti è comunque una retta reale ed è la polare del punto stesso.

Classificazione affine delle coniche generali:

↓

studio d. intersezione con la retta impropria $l_\infty : x_3 = 0$.

- $\mathcal{C} \cap l_\infty$ = 2 punti imm. coniugati => ELLISSI

- $\mathcal{C} \cap l_\infty$ = 1 punto reale contato 2 volte => PARABOLE

- $\mathcal{C} \cap l_\infty$ = 2 punti ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ reali e distinti => IPERBOLI.