Complessificazione

→ Ampliamento di uno spazio affine. → AGGIUNGERE I PUNTI IMPROPRI (DIREZIONI DELLE RETTE)

↓

PASSARE A COORDINATE OMOGENEE

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta = 0$$

$$x_1 = \frac{X_1}{X_{n+1}} \quad \ldots \quad x_n = \frac{X_n}{X_{n+1}}$$

$$\alpha_1 \frac{X_1}{X_{n+1}} + \ldots + \alpha_n \frac{X_1}{X_{n+1}} + \beta = 0$$

↓

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n + \beta X_{n+1} = 0$$

Curva algebrica.

Sia $f(x,y)=0$ una equazione ove $f(x,y)$ è un polinomio in x e y a coeff. in $\mathbb{K}$ non costante.

Si dice <u>curva algebrica</u> di $AG(2,\mathbb{K})$ l'insieme dei punti

$$V(f) := \{(x,y) \in AG(2,\mathbb{K}) \mid f(x,y)=0\}.$$

Similmente se $f(x,y,z)=0$ una eq. ove $f(x,y,z)$ è un polinomio non costante a coeff. in $\mathbb{K}$ in x, y, z.

Si dice <u>superficie algebrica</u> di $AG(3,\mathbb{K})$ l'insieme dei punti $V(f)=\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=0\}$.

possiamo associare ad una curva/superficie algebrica dei punti impropri?

$$PG(2,\mathbb{K}) \approx \widetilde{AG(2,\mathbb{K})}$$
?
$$PG(3,\mathbb{K}) \approx \widetilde{AG(3,\mathbb{K})}$$

Sí, ragionando sulle equazioni.

Se $f(x,y)=0$ é l'equazione di una curva algebrica di grado n in $AG(2,\mathbb{K})$

poniamo
$$\boxed{F(x_1,x_2,x_3) := x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)}$$

e diciamo che

$F(x_1 x_2 x_3)=0$ é la equazione omogenea associata ad $f(x,y)=0$

Esempio

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 1 + x$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) =$$

$$= x_3^2 \left(\frac{x_1^2}{x_3^2} + 2\frac{x_1 x_2}{x_3^2} + \frac{x_2^2}{x_3^2} - 1 + \frac{x_1}{x_3} \right)$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_3$$

polinomio omogeneo di grado deg f

N.B Diciamo punti di $\tilde{V}(F)$ i punti le cui coordinate omogenee sono classi di autosoluzioni di $F(x_1, x_2, x_3) = 0$

Si verifica che i punti propri di $\tilde{V}(F)$ sono proprio i punti di $V(f)$ ~~in~~ nel senso che corrispondono all'immagine dei punti di $V(f)$ in $AG(2,\mathbb{K})$ in $PG(2,\mathbb{K})$.

I punti di $\tilde{V}(F)$ impropri sono detti punti impropri della curva algebrica di equazione $f(x,y)=0$ o

$$F(x_1, x_2, x_3)=0$$

Esempio.

$$f(x,y) = x^2+3x+y^3+5.$$

punti impropri.

$$F(x_1, x_2, x_3) = X_3 X_1^2 + 3X_1 X_3^2 + X_2^3 + 5X_3^3.$$

intersechiamo con $x_3=0$

$$\Rightarrow \quad [(1,0,0)] = P_\infty$$

Ragionamento analogo per $n=3$.

Sup. alg. di eq.

$$f(x,y,z)=0$$

$\downarrow$

eq. omogenea

$$F(x_1 - x_4) = x_4^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$$

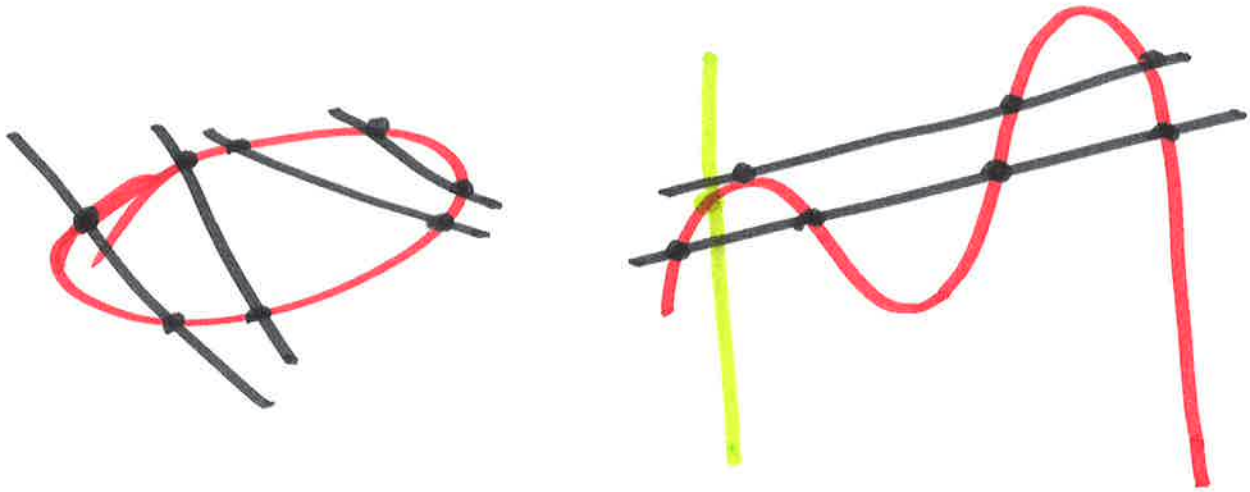
punti propri $x_4 \neq 0$
(coincidono con i punti in $AG(3,\mathbb{K})$)

punti impropri $x_4 = 0$

Ad ogni curva (sup.) algebrica è associato un numero: il grado dell'equazione che la definisce (ovvero il suo ordine).
Questo numero ha un significato geometrico?

Teorema: Sia $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebrica di ordine n (cioè $\deg f = n$).
Allora una generica retta del piano ampliato e complessificato interseca $\mathcal{C}$ in esattamente n punti contati con la debita molteplicità a patto che non sia $r \subseteq \mathcal{C}$.

[teorema dell'ordine]



Complessificazione.

$\forall\, \mathbb{K}$ campo con $\overline{\mathbb{K}}$ chiusura algebrica di $\mathbb{K}$.

$\rightarrow$ Vediamo con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd}
AG(2,\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\text{ampliamento}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset", "\text{compless.}"'] & PG(2,\mathbb{R}) \arrow[d, hook] \\
AG(2,\mathbb{C}) \arrow[r, hook] & PG(2,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

ampliato e complessificato

Considero oltre ai punti reali (punti di $AG(2,\mathbb{R})$ o punti di $PG(2,\mathbb{R})$) anche i punti che hanno coordinate in $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ punti immaginari.

<u>Def</u>: In $PG(2,\mathbb{C})$ un punto $[(x_1, x_2, x_3)]$ è detto <u>reale</u> $\Leftrightarrow$ $[(x_1, x_2, x_3)] = [(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)]$.

ovvero

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} \end{pmatrix} = 1$$

OSS: I punti reali di $PG(2,\mathbb{C})$ corrispondono esattamente ai punti dell'ampliamento di $AG(2,\mathbb{R})$ visto come sottoinsieme di $AG(2,\mathbb{C})$ dell'ampliamento

→ possiamo ragionare usando le proprietà di $\mathbb{C}$. → in particolare abbiamo che $\forall$ eq. non costante ha radici.

Sia $f(x,y)=0$ una equazione polinomiale non costante a coeff. in $\mathbb{C}$.

Diciamo che $\mathcal{V}(f)$ è reale

$\Leftrightarrow \quad \mathcal{V}(f) = \overline{\mathcal{V}(f)}$

ovvero

$$\{(x,y) \mid f(x,y)=0\} = \{(\bar{x},\bar{y}) \mid f(x,y)=0\}.$$

In particolare, se

$f(x,y)$ é a coeff. reali

$\Rightarrow$ ~~$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y})$~~

$$\overline{f(x,y)} = \bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}).$$

$\Rightarrow V(f)$ é una curva algebrica reale.

N.B. $V(f)$ ha anche punti immaginari.

Viceversa se $V(f) = \overline{V(f)} \Rightarrow \exists$ un polinomio $f'(x,y)$ a coeff. reali tale che $V(f) = V(f')$.

Esempio

$r_6: \quad 3ix + 2iy - 5i = 0$

r_6 ha anche eq.

$$3x + 2y - 5 = 0$$

$\Rightarrow r_6$ é reale.

$s: \quad x + 2iy - 1 = 0$

osserviamo che il

punto $(1, -i) \in s$.

ma $(1, +i) \notin s$

$\Rightarrow s$ non é reale.

Si dice che s é una retta

immaginaria.

Se $V(f)$ é una curva algebrica, la
curva immaginaria coniugata di $V(f)$
é $\overline{V(f)} = V(\bar{f})$.

Teorema: Sia r una retta in $PG(2, \mathbb{C})$.

Allora r ha sempre almeno un punto reale. Se r ha 2 punti reali $\Rightarrow r$ è reale.

DIM: Se r reale $\Leftrightarrow r$ è descritta da una eq. di I grado a coeff. in $\mathbb{R}$, quindi $r = \bar{r}$ ed r ha infiniti punti reali perché tale eq. ha infinite soluzioni reali. Se r ha 2 punti reali, allora per essi passa una e una sola retta di $PG(2, \mathbb{C})$ ma anche di $PG(2, \mathbb{R}) \Rightarrow r$ è reale.

Supponiamo dunque r non reale $\Rightarrow r \neq \bar{r}$ ma in $PG(2, \mathbb{C})$ due rette $\neq$ si intersecano sempre in un punto $\Rightarrow r \cap \bar{r} = \{P\}$.

ma se $r \cap \bar{r} = \{P\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \cap \bar{r} = \bar{r} \cap r = \{\bar{P}\}$.

$\Rightarrow P = \bar{P} \Rightarrow P$ é un punto reale. $\square$

Esempio.

$$3ix + y - 5 = 0$$

$$(0,5)$$

$$\begin{cases} 3ix + y - 5 = 0 \\ -3ix + y - 5 = 0 \end{cases} - \begin{cases} 3ix = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$$

punto reale.

per $n=3$: Una retta immaginaria di $PG(3, \mathbb{C})$ é detta di I specie se essa é complanare con la sua coniugata; di II specie ~~se~~ é sghemba con la sua coniugata.

rette im. di I specie hanno 1 punto reale.

rette im. di II specie non hanno punti reali.

Un piano in PG(3, C) contiene sempre almeno una retta reale → se ne ha più di una ⇒ esso è reale altrimenti è immaginario.

Se π contiene 2 rette reali ⇒ contiene 3 punti reali non allineati ⇒ ammette una equazione a coeff. in $\mathbb{R}$.

ALTRIMENTI

$\pi \cap \bar{\pi} = r$ (perché siamo in ambito ampliato) e $\overline{\pi} \cap \pi = \overline{r} = r$.

Quindi $r = \overline{r} \Rightarrow r$ retta reale $\square$

ATTENZIONE!! La geometria euclidea classica è quella sul campo reale!!

Def: Una retta r di $PG(2,\mathbb{C})$ è detta isotropa se essa è ortogonale a se stessa.

Teorema: Le rette isotrope di $PG(2,\mathbb{C})$ sono tutte e sole della forma

$$y = \pm i x + b.$$

Inoltre ogni 2 punti su di una retta isotropa sono a distanza euclidea 0 (!) fra loro.

Dim: $a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$ e deve essere ortogonale a sé stessa.

punto improprio

$$[(-b, a, 0)]$$

$$(-b, a, 0) \cdot (-b, a, 0) = 0$$

$$a^2 + b^2 = 0 \qquad (a,b) \neq (0\,0).$$

$$a = \pm i \cdot b$$

$\Rightarrow$ la retta passa per uno dei due punti impropri

$$J_\infty = [(1, i, 0)] \quad \text{oppure}$$

$$\overline{J_\infty} = [(1, -i, 0)]$$

(detti punti ciclici del piano).

MOSTRIAMO CHE DUE PUNTI SONO A DISTANZA 0 fra loro $\Leftrightarrow$ sono su di una retta isotropa.

Dim. $P=(x,y)$ $\quad Q=(x',y')$

$$d(P,Q)^2=(x-x')^2+(y-y')^2=0$$

$$\Rightarrow (x-x')=\pm i(y-y')$$

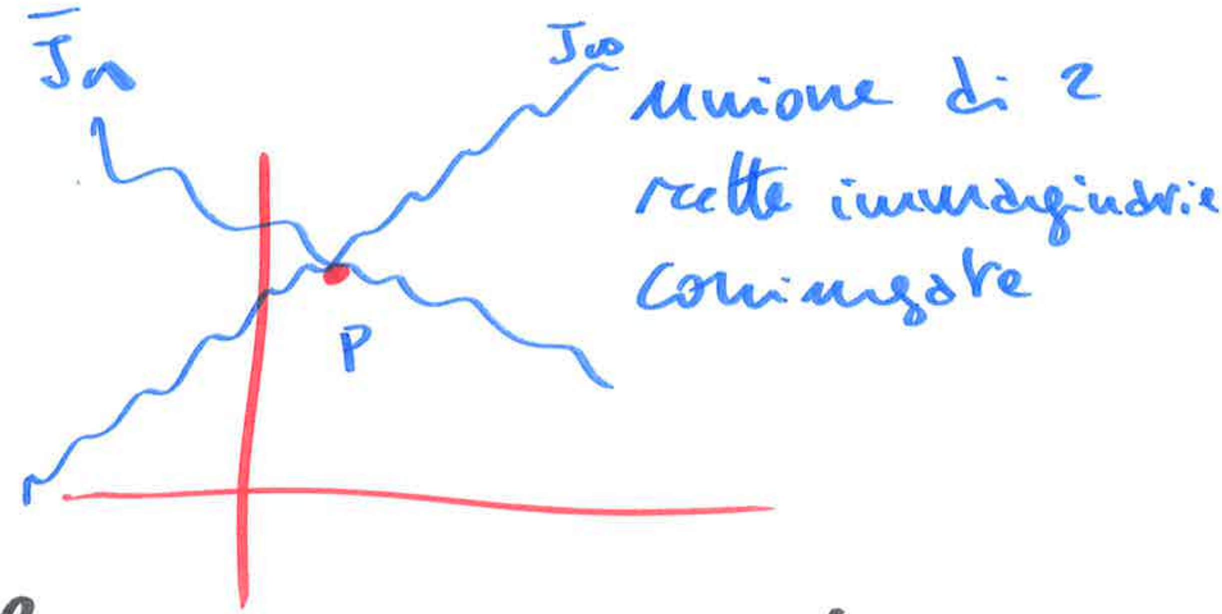
in particolare la retta per P e per Q ha coeff. angolare $\pm i$ e dunque passa per J_∞ o $\overline{J_\infty}$.

Il viceversa è immediato.

Es. cerchiamo il luogo dei punti a distanza 0 da $(1,2)$ in $AG(2,\mathbb{C})$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=0$$

$$[(x-1)+i(y-2)][(x-1)-i(y-2)]=0$$



N.B fra punti reali la distanza euclidea ha sempre le proprietà che deve.
Essa non è una distanza fra tutti i punti di $AG(2, \mathbb{C})$.

Teorema dell'ordine

$|V(f) \cap r| = n$ a meno che non sia $r \subseteq V(f)$

con $\deg V(f) = n$.

DIMOSTRAZIONE (non giusta).

$f(x,y) = 0$ eq. della curva.

$y = ax + b$ eq. della retta.

→ solo alcune rette

$g(x) = f(x, ax+b)$

$\boxed{\text{polinomio in } x \text{ di grado} \simeq n}$ ATTN.

$\Rightarrow$ poiché $\mathbb{C}$ è alg. chiuso

$g(x) = 0$ ammette n radici

$\Rightarrow$ ci sono n punti di intersezione

fra $V(f)$ ed r.

DOVE È L'ERRORE? NON È DETTO

$\deg g(x) = n$.

N.B Alg. chiuso è ovviamente

c. necessaria. Infatti $\deg g(x) \leq n$

e se il campo non fosse alg.

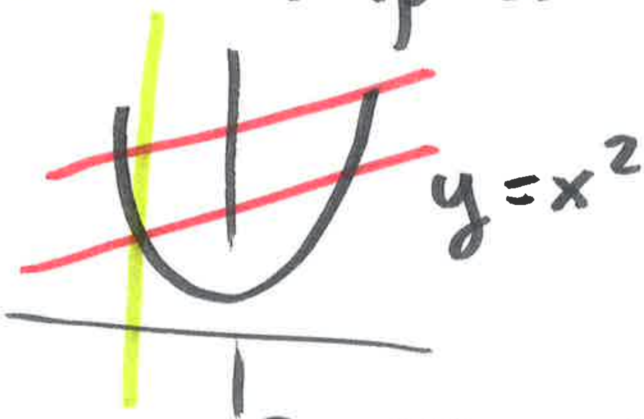
chiuso il numero di radici $\Rightarrow$

il numero di punti in comune potrebbe

essere $< n$.

DIM corretta

→ Si lavora in ambito ampliato



$P_\infty = [(0,1,0)]$

Sia $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione della curva algebrica.

Siano inoltre

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

due punti distinti di coord. omogenee assegnate.

Scriviamo la retta per P e Q in termini parametrici.

$$* \begin{cases} x_1 = \alpha p_1 + \beta q_1 \\ x_2 = \alpha p_2 + \beta q_2 \\ x_3 = \alpha p_3 + \beta q_3 \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \neq (0\ 0)$$

Sostituiamo * in

$$F(x_1, x_2\ x_3) = 0$$

Scriviamo

$$\underbrace{F(\alpha p_1 + \beta q_1, \alpha p_2 + \beta q_2, \alpha p_3 + \beta q_3) = 0}$$

$\downarrow$

polinomio in (α e β omogeneo.

Se $F(\text{———}) \equiv 0 \Rightarrow r_0 \subseteq V(f)$

$\Rightarrow$ fine.

ALTRIMENTI $\deg F(\text{———}) = n$

$\Rightarrow F(\alpha p_1 + \beta q_1 \_\_\_\_\_\_) =$

$$= a_0 \alpha^n \beta^0 + a_1 \alpha^{n-1} \beta^1 + \_\_\_\_ + a_n \alpha^0 \beta^n$$

ove gli a_i sono opportuni coeff.

Se $a_0 \neq 0 \Rightarrow$ osserviamo che se $\beta = 0$ fosse radice

$\Rightarrow a_0 \alpha^n = 0$ e dunque $\alpha = 0$

ma $(0,0) = (\alpha, \beta)$ non è ammissibile (perché non rappresenta un punto) $\Rightarrow$

deve essere $\beta \neq 0$ per tutte le soluzioni $\Rightarrow$ DIVIDIAMO l'equazione per β^n

ed otteniamo, posto $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$

$$a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \_\_\_ + a_n \xi^0 = 0$$

$\uparrow$

polinomio in ξ di grado n

$\Rightarrow$ ci sono n radici possibili ξ ed ognuno di esse corrisponde ad un punto $[(\alpha, \beta)] \simeq [(\xi, 1)]$

$[\xi P + Q]$.

ci sono n intersezioni.

Se $a_0 = a_1 = \_ = a_t = 0$, $a_{t+1} \neq 0$

$$a_{t+1} \alpha^{n-t-1} \beta^{t+1} + a_{t+2} \alpha^{n-t-2} \beta^{t+2} + \dots + a_n \beta^n = 0$$

raccogliendo.

$$(*')\quad \beta^{t+1}\left(a_{t+1}\alpha^{n-t-1} + a_{t+2}\alpha^{n-t-2}\beta + \ldots + a_n\beta^{n-t-1}\right) = 0$$

OSSERVIAMO CHE

$\beta = 0, \alpha = 1$ é

soluzione di $(*')$ $t+1$

volte. $\rightarrow$ il punto corr. a

$[(1,0)]$

é nell'intersezione $t+1$ volte.

inoltre fra parentesi c'é un pol.

omogeneo in α e β con

coeff. di α^{n-t-1} diverso da 0

e di grado $n-t-1$.

per lo stesso ragionamento di

prima, ci sono $n-t-1$ soluzioni

del tipo $[(\xi, 1)]$ ove

$$\xi = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \Rightarrow$$

\# totale soluzioni

$$(n-t-1)+(t+1)=n \qquad \square$$

Esempio.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow y = 9$$

$$\begin{cases} x_3x_2 = x_1^2 \\ x_1 = 3x_3 \end{cases} \qquad \cancel{x_3x_2 = 9x_3^2}$$

punto improprio $x_3 = 0$
$x_2 = 0$
$x_2 \neq 0$

$$[(0\ 1\ 0)]$$

le intersezioni sono 2.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^6 + x_2^3 x_3^3 - x_1 x_2 x_3^4 + 6 x_3^5 x_1 - x_3^6$$

in generale una retta interseca la curva data in 6 punti.

COROLLARIO.

Sia $f(x,y)=0$ l'eq. di una curva algebrica di grado n $\Rightarrow$ se esiste una retta r che interseca $V(f)$ in almeno $n+1$ punti $\Rightarrow r \subseteq V(f)$.

Si determini una curva algebrica di grado 2 che passi per i punti

$O=(0,0)$ $\quad P=(1,1)$, $\quad Q=(2,2)$

Es. I 3 punti sono allineati

si cerca una curva di grado 2 che li contenga. ALLORA questa curva deve contenere la retta $x-y=0$

(perché tale retta la interseca in O, P, Q quantomeno).

In particolare l'equazione della retta $(x-y)=0$ deve dividere l'equazione $f(x,y)=0$ della curva.

ma $f(x,y)$ ha grado 2.

quindi $f(x,y)=(x-y)\,p(x)$

con $\deg p(x)=1$ e ne segue che la curva data è unione di 2 rette visto che la sua eq. è il prodotto di 2 equazioni di rette.

Def Una curva algebrica

$$f(x,y)=0$$

é detta riducibile se $\exists$ $g(x,y)$, $h(x,y)$ polinomi non costanti tali che

$$f(x,y)=g(x,y)\cdot h(x,y).$$

Irriducibile altrimenti.

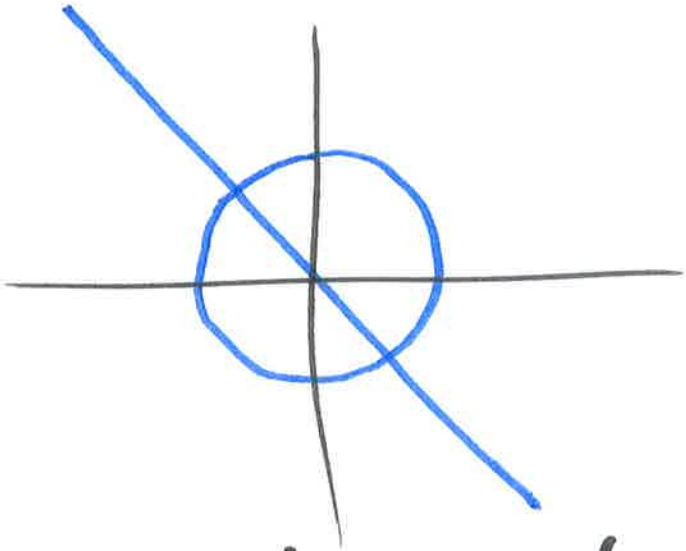
OSS $V(g(x,y)\cdot h(x,y)) = V(g(x,y)) \cup V(h(x,y))$

Una curva riducibile ha come insieme dei punti l'unione degli insiemi dei punti delle sue componenti e si dice che si spezza in esse.

Es: $x^2+y^2=0$ riducibile.

$$(x+iy)\cdot(x-iy)=0$$

Es 2: $(x^2+y^2-1)(x+y)=0$



N.B in ambito complessificato se una curva algebrica è unione degli insiemi dei punti di 2 curve algebriche $\Rightarrow$ essa è riducibile.

OSS: Quando contiamo le intersezioni è sempre importante tenere conto delle molteplicità.
$\downarrow$
la def di molteplicità è per noi essenzialmente algebrica $\to$ quante volte un certo valore è radice di una equazione.

$\to$ Si può anche dare una interp. geometrica.