Ampliamento (proiettivo) di uno spazio affine.

$$\mathbb{A}_n(\mathbb{K}) = (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$$

$$\widetilde{\mathbb{A}_n(\mathbb{K})} = (A \cup A_\infty, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$$

<u>Def</u>: Si dicono <u>punti impropri</u> di $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$ le direzioni delle rette di $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$.

equiv. i sottospazi 1-dimensionali di $V_n(\mathbb{K})$.

Indico con A_∞ l'insieme dei punti impropri di $\mathbb{A}_n(\mathbb{K})$

Chiamo i punti impropri anche "punti all'infinito".

Sia $S = [P; W]$ un sottospazio di $A_n(\mathbb{K})$. Pongo

$$\tilde{S} := [P; W] \cup \{ U \leq W \mid \dim U = 1 \}.$$

$n = 2$. $\quad A_2(\mathbb{K}) \qquad \widetilde{A_2(\mathbb{K})}$

$$r = [P; W_1] \longrightarrow \tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\}.$$

$$r = [P; W_1] \qquad \tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\}.$$
$$\longrightarrow$$
$$s = [Q; W_1'] \qquad \tilde{s} = [Q; W_1'] \cup \{W_1'\}.$$

se $r \cap s = \{P\} \Rightarrow W_1 \neq W_1'$ (r ed s non sono parallele).

$$\Rightarrow \tilde{r} \cap \tilde{s} = \{P\}.$$

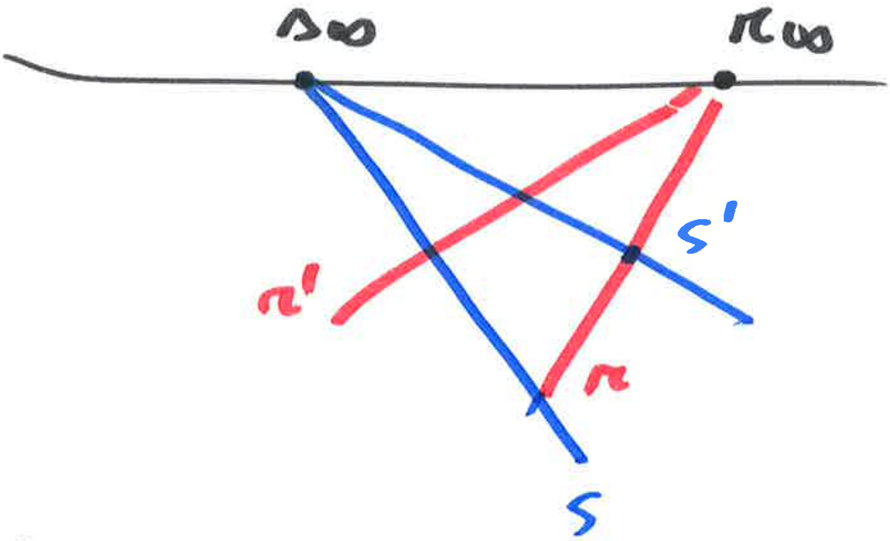
se $r \parallel s$ & $r = s \Rightarrow \tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\} =$
$$= [P; W_1] \cup \{W_1\} = \tilde{s}.$$

se $r \parallel s$ & $r \cap s = \emptyset \Rightarrow \tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\} \quad \tilde{s} = [Q; W_1] \cup \{W_1\}$

$\tilde{r} \cap \tilde{s} = \{ w_1 \}$.

Due rette parallele e distinte si incontrano nel medesimo punto improprio.

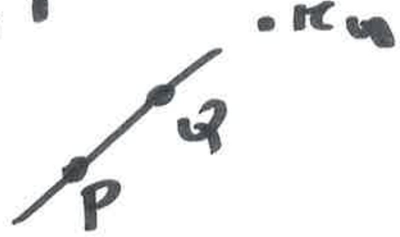
Teorema: due rette $\tilde{r}, \tilde{s}$ in $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ che nascono da rette r, s di $A_2(\mathbb{K})$ si intersecano sempre.
La loro intersezione è un solo punto improprio $\Leftrightarrow$ $r \cap s = \emptyset$ e $r \parallel s$.



I punti impropri sono i punti di fuga delle rette parallele.

OSS: In $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ per

- 2 punti distinti propri $\exists!$ retta.



- 1 punto proprio e 1 punto improprio
  P, r_∞ $\exists!$ retta.

$$\tilde{r} = [P ; r_\infty] \cup \{r_\infty\}.$$

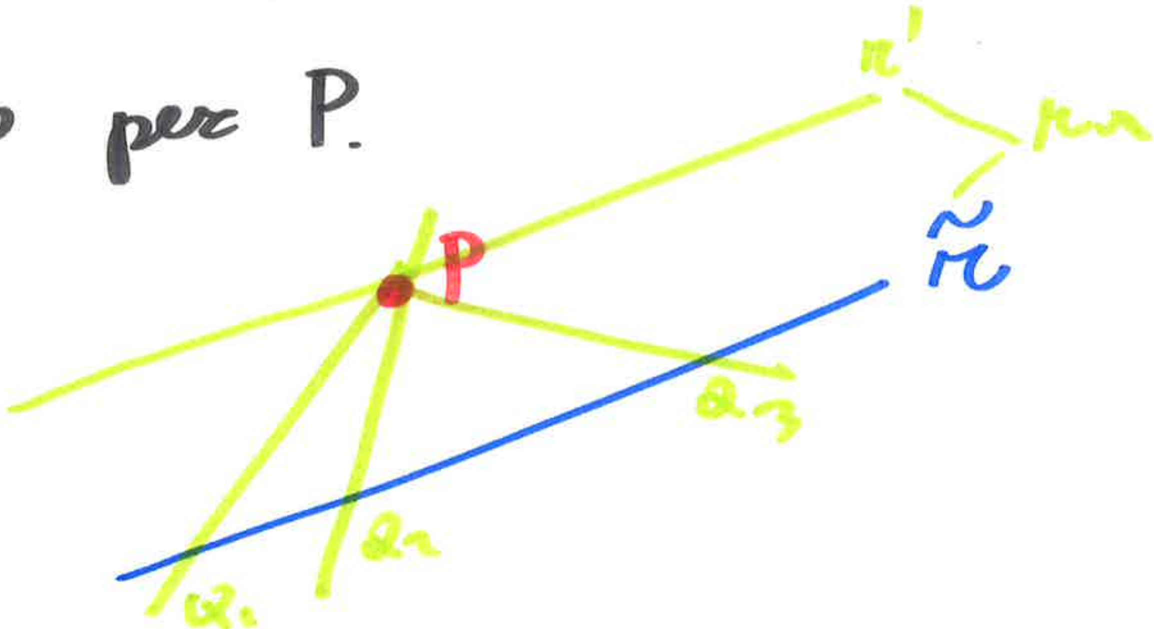
- diciamo **retta impropria** di $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ l'insieme A_∞ di tutti i punti impropri di $A_2(\mathbb{K})$.
- per 2 punti impropri $\exists!$ retta.

COMUNQUE PRESI 2 PUNTI DI $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ DISTINTI $\exists!$ retta passante per essi.

Applicazione.

Sia $P \in A_2(\mathbb{K})$ ed r una retta di $A_2(\mathbb{K})$ non passante per P.

Allora $\exists$ una biiezione fra i punti di $\tilde{r}$ e le rette del fascio per P.

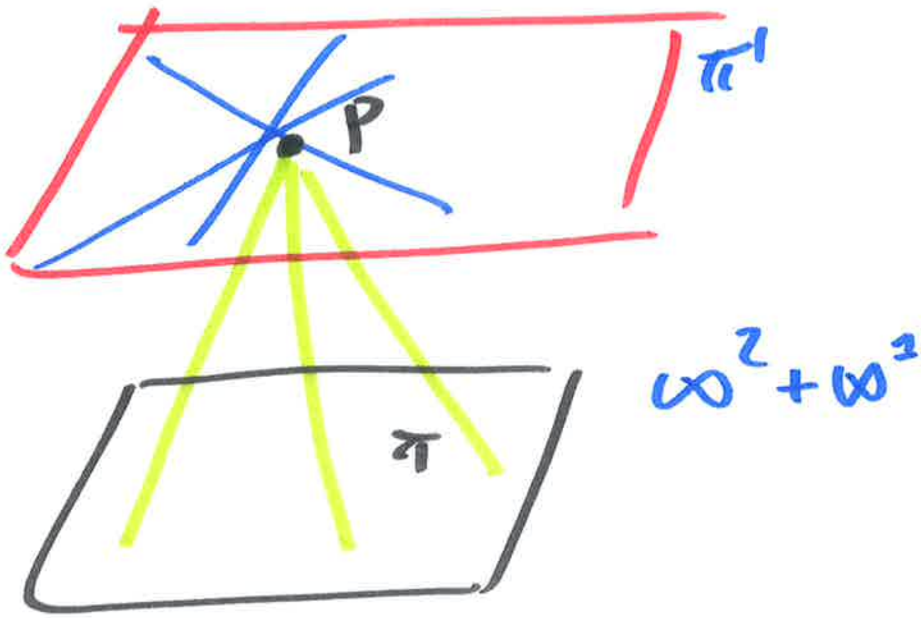


In generale se r retta r_∞ sarà il suo punto improprio.

$\Rightarrow$ $\forall$ retta $\tilde{s}$ per P interseca $\tilde{r}$ in esattamente un punto.

MA per 2 punti $\exists!$ retta.

$\forall$ retta per P associo il suo punto di intersezione con $\tilde{r}$ (e viceversa).



Nell'ambito ampliato aggiungiamo a π tutti i suoi punti impropri

$\Rightarrow$ direzioni delle rette contenute in π = direzione delle rette contenute in un piano $\pi' \parallel \pi$.

OGNI RETTA DELLA STELLA DI CENTRO P interseca $\tilde{\pi}$ in uno e un solo punto.

DEF: Chiamo $PG(n, \mathbb{K})$ la struttura geometrica ove: i punti sono i sottospazi vett. 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ e i sottospazi di dimensione r con $0 \leq r \leq n$ sono i sottospazi vettoriali $r+1$ dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$

~~$\mathbb{K}^{n+1}$~~

In particolare la dimensione vettoriale di $W \leq \mathbb{K}^{n+1}$ considerato in $PG(n, \mathbb{K})$ la chiamerò anche rango di W.

Teorema:

Sia $\widetilde{A_n(\mathbb{K})} = A \cup A_\infty$

A: punti propri

A_∞: punti impropri

Supponiamo di avere un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$

$\rightarrow$ ogni punto proprio avrà coordinate $(x_1 \text{——} x_n)$

rispetto la base $\mathcal{B}$ ogni punto improprio è uno spazio vettoriale

$$\mathcal{L}((a_1 \text{——} a_n)).$$

Considero la funzione

$$\psi : \widetilde{AG(n, \mathbb{K})} \longrightarrow PG(n, \mathbb{K})$$

$$\begin{array}{c} P \in AG(n, \mathbb{K}) \\ (x_1 \text{——} x_n) \end{array} \xmapsto{\text{pti propri}} \mathcal{L}((x_1 \text{——} x_n\ 1))$$

$$P_\infty = \mathcal{L}((a_1 \text{——} a_n)) \xmapsto{\text{pti impropri}} \mathcal{L}((a_1 \text{——} a_n\ 0))$$

<u>OSS:</u> ψ é una biiezione.

Infatti se

$$\psi((x_1 - x_n)) = \psi((y_1 - y_n)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}((x_1 - x_n \ 1)) = \mathcal{L}((y_1 - y_n \ 1))$$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} x_1 & - & x_n & 1 \\ y_1 & - & y_n & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_n) = (y_1 - y_n).$$

e similmente se

$$\psi((\alpha_1 - \alpha_n)) = \psi((\beta_1 - \beta_n)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}((\alpha_1 - \alpha_n 0)) = \mathcal{L}((\beta_1 - \beta_n 0))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}((\alpha_1 - \alpha_n)) = \mathcal{L}((\beta_1 - \beta_n))$$

e quindi i punti impropri coincidono. (INIETTIVA).

Inversa: Sia $\mathcal{L}((x_1 - x_n x_{n+1}))$ un sottospazio 1-dim di $\mathbb{K}^{n+1}$

$\Rightarrow$ se $x_{n+1} = 0$ poniamo

$$\varphi^{-1}(\mathcal{L}((x_1 \text{—} x_{n+1})) = \mathcal{L}((x_1 \text{—} x_n))$$

punto improprio.

se $x_{n+1} \neq 0$ poniamo

$$\varphi^{-1}(\mathcal{L}((x_1 \text{—} x_{n+1})) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \; \frac{x_2}{x_{n+1}} \text{—} \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

punto proprio.

NON DIPENDE DAL GEN. SELEZIONATO PER IL SOTTOSPAZIO

ESERCIZIO: verificare che φ^{-1} è effettivamente una funzione!!

In generale, dato un punto P di $\widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$ chiamiamo **coordinate omogenee** di P

la classe di equivalenza

$$[(x_1 \_\_\_ x_{n+1})] = [\psi(P)]$$

di tutti i vettori proporzionali ad un generatore di $\psi(P)$.

$$(x_1 \_\_\_ x_n) \longrightarrow [(x_1 \_\_\_ x_n\ 1)]$$

$$\mathcal{L}(\alpha_1 \_\_\_ \alpha_n) \longmapsto [(a_1 \_\_\_ a_n\ 0)]$$

elementi di

$$\frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

ove $\bar{x} \sim \bar{y} \iff \exists\, \alpha \neq 0$ tale che $\bar{x} = \alpha \bar{y}$

le coord. omogenee di punti di $\widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$ sono classi di proporzionalità di vettori di $\mathbb{K}^{n+1}$ non nulli.

Sia $S = [P, W_{n-1}]$ un iperpiano

di equazione

$$(*) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \_\_ + a_n x_n + b = 0$$

in $AG(n, \mathbb{K})$.

ci chiediamo cosa rappresenti

$\psi(\tilde{S})$

$$[(x_1 \_\_ x_n \, x_{n+1})] \xrightarrow{\psi^{-1}} \left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \, \frac{x_2}{x_{n+1}} \_\_ \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$$

punto proprio.

$x_{n+1} \neq 0$

$$a_1 \frac{x_1}{x_{n+1}} + a_2 \frac{x_2}{x_{n+1}} + \_\_ a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} + b = 0$$

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \_\_ + a_n x_n + b \, x_{n+1} = 0} \quad (*)$$

tutti i punti propri di $\tilde{S}$ soddisfano

$(*) \rightarrow$ le loro coord. omogenee

sono classi di autosoluzioni di $(*)$

con $x_{n+1} \neq 0$.

e se prendo $x_{n+1}=0$?

→ punti impropri che soddisfano l'eq.

$$a_1x_1 + \_\_\_\_ + a_nx_n = 0$$

↓

è l'equazione omogenea associata all'equazione di S ⇒ è proprio l' equazione che ci dà i punti impropri di S.

In realtà (*) descrive sia i punti propri di $\tilde{S}$ che i suoi punti impropri.

(*) è detta equazione omogenea di S.

Le sue classi di prop. di autosoluzioni corrispondono alle coordinate omogenee dei punti di $\tilde{S}$.

OSSERVIAMO ANCHE CHE LE SOLUZIONI DELL'EQ OMOGENEA SONO UNO SPAZIO VETT.

di rango $n = \dim S + 1$

Ad ogni spazio

$\tilde{S} = [P; V_{n-1}]$ di $AG(n, \mathbb{K})$

corrisponde uno spazio vettoriale di rango n in $\mathbb{K}^{n+1}$.

Chiaramente visto che ogni sottospazio lineare è intersezione di iperpiani noi possiamo estendere la corrispondenza fra

SOTTOSPAZI DI $AG(n, \mathbb{K})$ di dimensione t $\longleftrightarrow$ SOTT. VETTORIALI DI $\mathbb{K}^{n+1}$ DI RANGO $t+1$. (propri)

$n=2$.

$$\widetilde{AG(2,\mathbb{K})} \qquad\qquad PG(2,\mathbb{K})$$

$$(x,y) \longmapsto [(x,y,1)]$$

$$(l,m) \longmapsto [(l,m,0)].$$

Teorema: in $\widetilde{AG(2,\mathbb{K})}$ due rette si intersecano sempre in almeno un punto.

DIM: una retta di $\widetilde{AG(2,\mathbb{K})}$ corrisponde ad un sottospazio vett. di rango 2 in $\mathbb{K}^3$.

Due sottospazi di rango 2 in $\mathbb{K}^3$ si intersecano sempre in almeno un ~~punto~~ sottospazio di rango 1 (per Grassmann) $\rightarrow$ un sottospazio di rango 1 è un punto di $\widetilde{AG(2,\mathbb{K})}$. $\square$

Siano $P = (x_1, y_1)$

$Q = (x_2, y_2)$

due punti di $AG(2, \mathbb{k})$.

Voglio trovare l'eq. della retta r per P e per Q.

<u>OSS</u>: $\psi(r) \ni [(x_1, y_1, 1)], [(x_2, y_2, 1)]$

$$[(x, y, 1)] \in \psi(r) \iff$$

$$rk\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

generano $\psi(r)$.

$P = (x_1, y_1)$

$\bar{v} = (l, m)$

consideriamo l'eq. della retta per P con direzione $\mathcal{L}(\bar{v})$.

$\tilde{r} = \mathcal{L}((x_1\ y_1\ 1), (l\ m\ 0))$

$$rk\begin{pmatrix} x_1 & l & x \\ y_1 & m & y \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

retta affine per P e Q.

$$X = P + \alpha \overrightarrow{PQ} \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

retta ampliata per P e per Q.

$$X \in [P] + [Q]$$

Def di punti geometricamente indipendenti.

t punti sono geom. indipendenti

$\Leftrightarrow$ il più piccolo sottospazio che li contiene ha dim $= t-1$.

$\downarrow$

passando a coord. omogenee.

t punti sono geom. indipendenti

$\Leftrightarrow$ lo spazio vettoriale generato dalle loro coordinate omogenee ha rango t.

N.B questo definizioni si estendono anche ai punti impropri!

~~Un~~ L'insieme dei punti di $\widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$ che corrispondono ad un sottospazio di ~~dim~~ rango $t+1$ in $PG(n, \mathbb{K})$ sarà detto retta se $t=1$

piano se $t=2$

$\vdots$

etc.

In particolare si parla di retta/piano.

impropri se tutti i punti di tale retta/piano/... sono punti impropri.

$\boxed{n=3}$ $ax+by+cz+d=0$ piano di $AG(3,\mathbb{K})$.

↓

$x = \frac{x_1}{x_4}$ $y=\frac{x_2}{x_4}$ $z=\frac{x_3}{x_4}$

↓

$$\boxed{a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0}$$ eq. omogenea

↓

sott. vett. di rango = 3.

se $a=b=c=0$, $d \neq 0$ → tutti i punti impropri

↓

piano improprio

$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ → piano in generale.

Per la formula di Grassmann 2 piani non coincidenti si intersecano sempre in una retta.

$3+3=6$ e noi siamo in $\mathbb{K}^4$.

- la retta contiene punti propri $\Rightarrow$ i 2 piani sono incidenti

  la retta consta di soli punti impropri.

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4 = 0 \end{cases}$$

é equivalente $\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

ma questo é possibile $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$$

$\Leftrightarrow$ i 2 piani sono paralleli.

OSS: Un fascio di piani in $AG(3,\mathbb{K})$ è un fascio

proprio se i piani passano tutti per una medesima retta propria assegnata; un fascio **improprio** se i piani passano tutti per una medesima retta impropria (= sono tutti paralleli) assegnata.

$\pi: \quad ax+by+cz+d=0$

$\pi': \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$

2 piani

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$

distinti

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

α omogenei

$$\alpha(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)+\beta(a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4)=0$$

Se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \to$ fascio improprio

$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \to$ fascio proprio.

Esercizio.

Siano $\pi = [P; W]$ uno spazio lineare in $AG(n, \mathbb{K})$ e

$\pi' := [Q; W^\perp]$

dimostrare che $\pi \cap \pi'$ è un punto.

DIM: $\tilde{\pi} \to \tilde{W}$ con W $\dim \tilde{W} = \dim \pi + 1$

$\tilde{\pi}' \to \hat{U}$ con $\dim \hat{U} = \dim W^\perp + 1$
$= n - \dim \pi + 1$

$\Rightarrow \dim \tilde{\pi} + \dim \tilde{\pi}' = \dim \pi + 1 +$
$+ n - \dim \pi + 1$
$= n + 2$

in uno spazio $\mathbb{K}^{n+1}$

$\Rightarrow \dim \tilde{\pi} \cap \tilde{\pi}' = 1$

cioé $\pi \cap \pi'$ é un punto $\square$