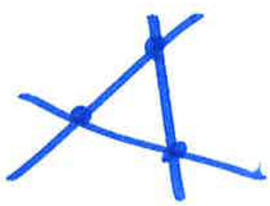
Geometria Euclidea → Geometria affine
+ metrica (nozione di distanza euclidea).

Sia $A_n(\mathbb{K}) = (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$ uno spazio affine e $\mathcal{C} \subseteq A$. Diciamo che i punti in $\mathcal{C}$ sono geometricamente indipendenti se $|\mathcal{C}| = t$ ed il più piccolo sottospazio affine che li contiene ha dimensione $t-1$. Tale sottospazio è detto generato da $\mathcal{C}$.

In $AG(2, \mathbb{K})$ → $|\mathcal{C}| = 1$ → un punto è indip.

$|\mathcal{C}| = 2$ → due punti sono indip. se generano una retta.



$|\mathcal{C}| = 3$ → tre punti sono indip. se non sono allineati

$|\mathcal{C}| > 3$ → i punti sono dip.

In $AG(3, \mathbb{K})$: $|\mathcal{P}| = 1, 2, 3$ come in $AG(2, \mathbb{K})$.

$|\mathcal{P}| = 4 \to 4$ punti sono indip. se non sono complanari

$|\mathcal{P}| > 4 \to$ i punti sono dipendenti.

$\boxed{\text{N.B: In } V_{n+1}(\mathbb{K}),\ t \text{ vettori sono indipendenti} \iff \text{il più piccolo sottospazio che li contiene ha dimensione } t}$

Def: Uno spazio affine reale $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ è detto spazio euclideo se $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = (A, f: \cancel{A} \times A \to V_n^{\circ}(\mathbb{R}))$

Spazio vett. euclideo.

$\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ spazio euclideo = spazio affine in cui è definito un prodotto scalare def. positivo sullo spazio vett. di traslazione.

Def: Sia $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ uno spazio euclideo. Si dice <u>distanza euclidea</u> fra $P, Q \in A$ il numero reale

$$\boxed{d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|}$$

In generale in di uno spazio Affine si dice <u>distanza</u> ogni funzione

$$d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}.$$

tale che.

1) $d(A,B) = d(B,A)$

2) $d(A,B) \geq 0 \ \forall A,B$ &
$d(A,B) = 0 \iff A = B$

3) $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$

Teorema: La distanza euclidea è una distanza.

DIM: 1) $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B,A)$

2) $d(A,B) = 0 \iff \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \iff \overrightarrow{AB} = \underline{0} \iff A = B$

3) $d(A,B) + d(B,C) = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| \geq$
$\geq \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = d(A,C)$

$\square$

Esempio di distanza <u>NON</u> euclidea.

d_H = distanza di HAMMING in $AG(n, \mathbb{K})$.

$$d_H(\bar v, \bar w) = \#\{i \mid v_i \neq w_i\}.$$

Esercizio → verificare che d_H è una distanza.

$$d_H(\bar u, \bar v) + d(\bar v, \bar w) \geq d(\bar u, \bar w).$$

$$d_H(\bar u, \bar w) = \#\{i \mid u_i \neq w_i\} =$$

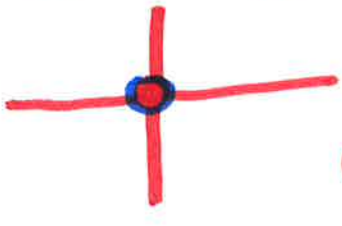
$$= \#\{i \mid u_i \cancel{=} v_i, v_i \neq w_i\} +$$

$$+ \#\{i \mid u_i \cancel{\neq v_i}, u_i \cancel{\neq w_i}\} \leq$$

Tolgo

$$\leq d_H(\bar v, \bar w) + d_H(\bar u, \bar v) \qquad \square$$

$\mathbb{R}^2$, la sfera di $d_H = 1$ e centro $(0,0)$ è l'unione dei 2 assi.



Def: Sia $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ uno spazio euclideo.
e siano $S=[P;W]$, $\mathcal{T}=[Q;\mathcal{U}]$
due suoi sottospazi.
Allora si dice che S e $\mathcal{T}$ sono
orthogonali fra loro se

$$W \subseteq \mathcal{U}^{\perp} \text{ oppure } W^{\perp} \subseteq \mathcal{U}$$

In tal caso si scrive

$$S \perp \mathcal{T}.$$

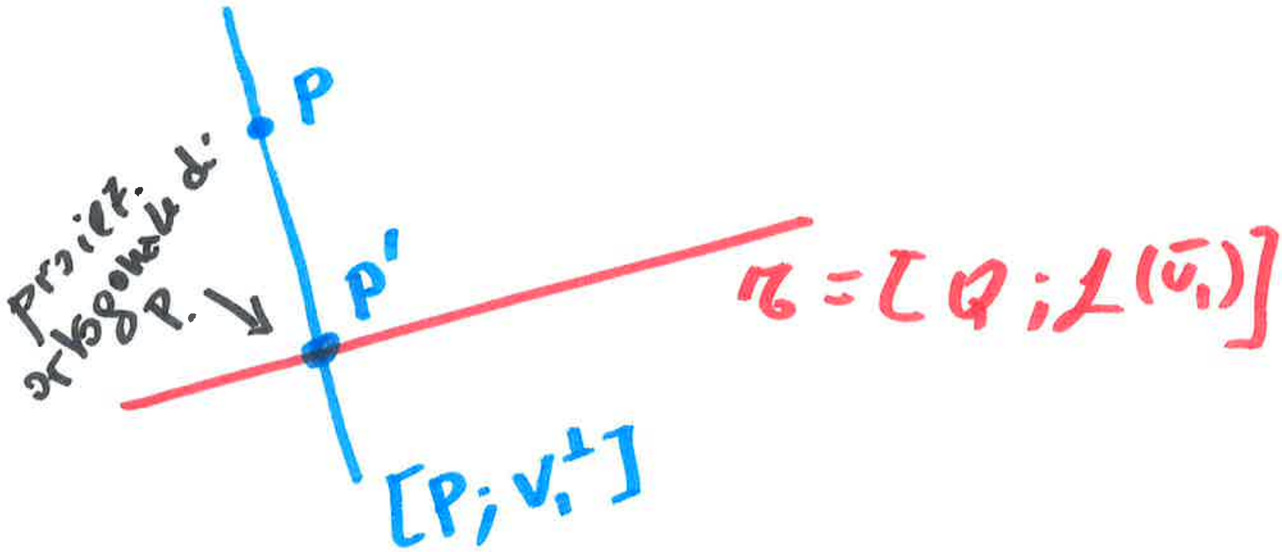
N.B.

$$W \subseteq \mathcal{U}^{\perp} \iff \mathcal{U} \subseteq W^{\perp}$$
$$W^{\perp} \subseteq \mathcal{U} \iff \mathcal{U}^{\perp} \subseteq W$$

basta che valga una delle 4 condizioni.

Def: Sia $P \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ un punto e
sia $S=[Q;W]$ un sottospazio di
$\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$. Si dice proiezione ortogonale
di P su S il punto di intersezione
fra S e lo spazio $\mathcal{T}=[P;W^{\perp}]$

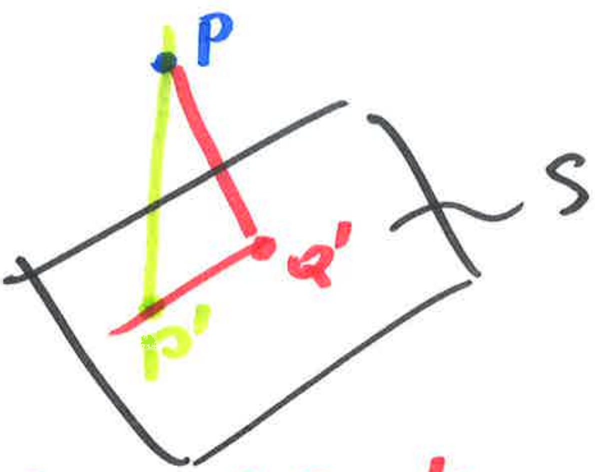
In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$



<u>OSS</u>: $[P; W^\perp] \cap [Q; W]$ è proprio un punto, in quanto $W^\perp \cap W = \{\underline{0}\}$.

per far vedere che contiene almeno un punto → aspettiamo di avere l'ampliamento proiettivo. (seguirà dalla formula di Grassmann).

Teorema: Sia $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ uno spazio euclideo, e sia $P \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ e $S = [Q; W]$ un sottospazio di $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.
Allora il punto P', proiezione ortogonale di P su S è il punto di S più vicino a P (inteso come "a distanza minima").



$$\forall Q' \in S, \quad d(P, Q') \geq d(P, P').$$

DIM: Sia $Q' \in S$ e P' la proiezione ortogonale di P su S.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \overrightarrow{PQ'} \cdot \overrightarrow{PQ'} = (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}) \cdot (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'})$$

$$= (\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP'}) + 2(\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{P'Q'}) + (\overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{P'Q'})$$

$$= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 + 2(\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{P'Q'})$$

<u>oss</u>: $P' \in [P; W^\perp]$

In particolare $\overrightarrow{PP'} \in W^\perp$

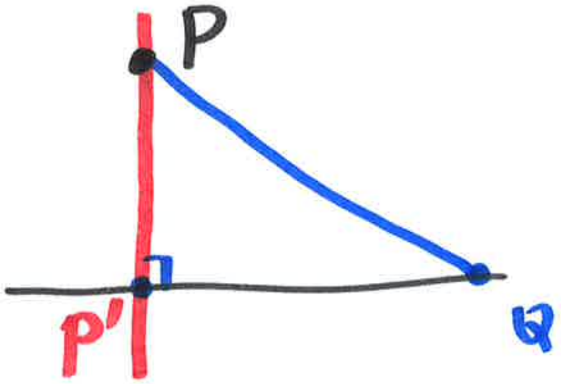
mentre $P', Q' \in S \Rightarrow \overrightarrow{P'Q'} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{P'Q'} = 0 \Rightarrow$

$$d(P,Q')^2 = \|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 \geq$$

$$\geq \|\overrightarrow{PP'}\|^2 = d(P,P'). \qquad \square$$

<u>N.B</u> abbiamo anche verificato il teorema di Pitagora!!



$\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$

$$\|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

Def: Sia $P \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ un punto e $S = [Q; W]$ un sottospazio.

Si dice <u>distanza</u> di P da S la distanza $d(P, P')$ ove P' é la proiezione ortogonale di P su S.

in altre parole

$$d(P, S) = \min\{d(P, Q') \mid Q' \in S\}.$$

$$d(P, S) = 0 \iff P \in S.$$

Def: Siano $A, B \in \mathcal{E}_n(\mathbb{K})$.

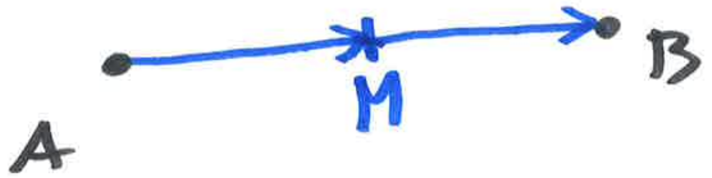
Si dice <u>iperpiano assiale</u> fra A e B il luogo dei punti X di $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ tali che $d(A, X) = d(B, X)$.

Si dice punto medio fra A e B il punto M tale che [illegible]

$$B = M + \vec{AM}.$$

In particolare $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$

$$B = A + \vec{AB} = A + \vec{AM} + \vec{AM} = M + \vec{AM} \Rightarrow \vec{AB} = 2\vec{AM}$$



$$B = M + \vec{AM} \Rightarrow$$

$$B = A + \vec{AB} = \underbrace{M}_{A + \vec{AM}} + \vec{AM} =$$

$$= A + \vec{AM} + \vec{AM}$$

$$A + \vec{AB} = A + 2\vec{AM}$$

$$2\vec{AM} = \vec{AB}$$

In un riferimento affine se

$A = (x_1 \text{ — } x_n)$ $\quad B = (y_1 \text{ — } y_n)$

$\Rightarrow$ M ha coordinate

$$(x_1 \ldots x_n) + \frac{1}{2}\left[(y_1 - y_n) - (x_1 - x_n)\right]$$

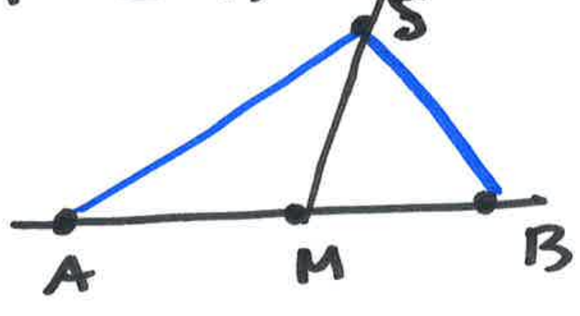
$$= \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \ldots, \frac{x_n+y_n}{2}\right).$$

<u>OSS</u>: $d(A,M) = d(M,B)$

$d(A,M) = \frac{1}{2} d(A,B)$

<u>Teorema</u>: l'iperpiano assiale fra A e B è il sottospazio $[M; \overrightarrow{AB}^{\perp}]$ ove M è il punto medio fra A e B.

<u>DIM</u>: Il punto M è equidistante fra A e B



Sia S tale che $d(A,S) = d(B,S)$
mostriamo che $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS}$$
$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{AM}$$

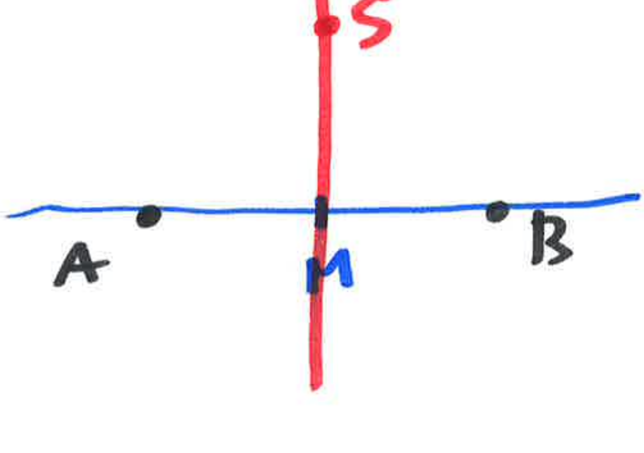
perché $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

$$\left.\begin{aligned} \|\overrightarrow{AS}\|^2 &= \cancel{\|\overrightarrow{AM}\|^2} + \cancel{\|\overrightarrow{MS}\|^2} + 2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MS} \\ \|\overrightarrow{BS}\|^2 &= \cancel{\|\overrightarrow{BM}\|^2} + \cancel{\|\overrightarrow{MS}\|^2} - 2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MS} \end{aligned}\right] \text{uguali!}$$

$$2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MS} = -2\,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MS} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MS} = 0 \Rightarrow S$ appartiene all'iperpiano per M ortogonale ad $\overrightarrow{AB}$.

Viceversa



supponiamo S appartenente all'iperp. ortogonale ad $\vec{AB}$ per M $\Rightarrow$

$$\vec{SM} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{SM} \cdot \vec{AM} = 0$$

e

$$d(A,S)^2 = \|\vec{AS}\|^2 = \|\vec{AM} + \vec{MS}\|^2 =$$
$$= \|\vec{AM}\|^2 + \|\vec{MS}\|^2 = \|\vec{BM}\|^2 + \|\vec{MS}\|^2 =$$
$$= \|\vec{BS}\|^2 = d(B,S)^2$$

$\square$

Def: In $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ si dice riferimento euclideo un riferimento affine $\Gamma = (O, \mathcal{B})$ tale che $\mathcal{B}$ sia una base ortonormale di $V_n^\circ(\mathbb{K})$.

Rispetto un riferimento euclideo il prodotto scalare assume la forma standard.

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

DISTANZA FRA 2 PUNTI:

$P = (x_1 \text{———} x_n)$

$Q = (y_1 \text{———} y_n)$

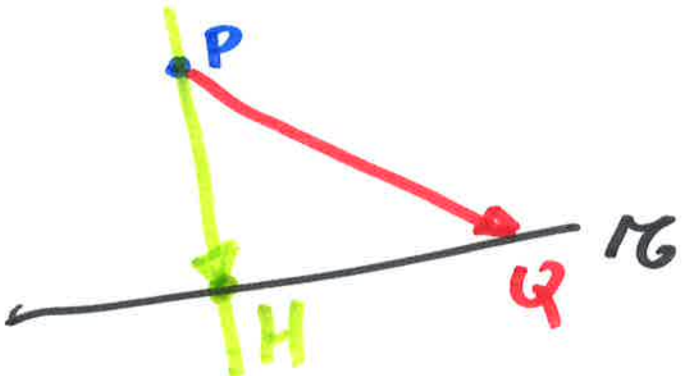
$\Rightarrow d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

DISTANZA PUNTO/IPERPIANO

- $n=2$: distanza punto/retta.

$P = (x_0, y_0)$

$r: \; ax+by+c=0$



$d(P,r) = \|\vec{PH}\|$

prendiamo $Q \in r$ $\quad Q = (x_1, y_1)$

con $ax_1+by_1+c=0$

osserviamo che $\vec{PH}$ è la proiezione

nella direzione ortogonale ad r
del vettore $\overrightarrow{PQ}$

NOTIAMO CHE se r ha eq. $ax+by+c=0$
$\Rightarrow$ il suo spazio di traslazione
è generato da $(-b,a)$
e quindi l'ortogonale di tale
spazio deve essere generato proprio
da (a,b).

$$d(P,r) = \|\overrightarrow{PH}\| = \cancel{\|\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ}\|}$$

$$\overrightarrow{PH} = (a,b)\cdot\frac{(a,b)\cdot\overrightarrow{PQ}}{\|(a,b)\|^2}$$

$$(a,b)\frac{(a,b)\cdot(x_1-x_0,y_1-y_0)}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{ax_1-ax_0+by_1-by_0}{1}\frac{(a,b)}{a^2+b^2} =$$

OSSERVANDO $Q \in R$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$-c = ax_1 + by_1$$

$\downarrow$

sostituendo

$$\frac{(a, b)}{a^2 + b^2}(-ax_0 - by_0 - c)$$

calcolando la norma.

$$\frac{\|(a, b)\|}{|a^2 + b^2|}|-ax_0 - by_0 - c|$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\nearrow$

distanza punto/retta.

$\square$

Del tutto analogo:

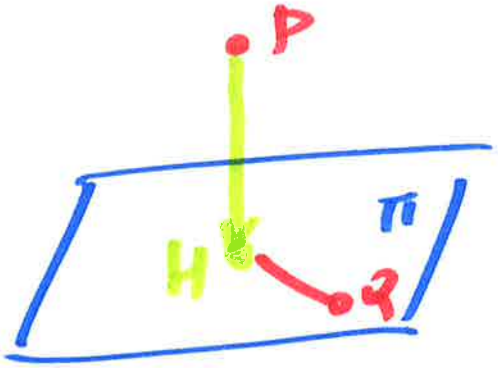
DISTANZA PUNTO/PIANO

in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

$\pi: ax+by+cz+d=0$

1) osservare che la direzione normale a π (i.e. lo spazio $W^\perp$ ove W è la giacitura di π) è generata da (a,b,c)

2)



osservare che $\forall Q \in \pi$ il vettore $\vec{PH}$ è la proiezione di $\vec{PQ}$ sulla direzione di $\vec{n} = (a,b,c)$.

$$d(P,\pi) = \|\vec{PH}\| = \boxed{\|\vec{PH}\| \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{PH}|}{\vec{PH}\cdot\vec{PH}}} =$$

$$= \boxed{\|\bar{n}\| \frac{|\vec{PQ}\cdot\bar{n}|}{\bar{n}\cdot\bar{n}}}$$

3) ponendo $P = (x_0, y_0, z_0)$

$Q = (x_1, y_1, z_1)$

osservando che

$$a x_1 + b y_1 + c z_1 = -d$$

si ha $|\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{n}| = |a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|$

$\bar{n} \cdot \bar{n} = a^2 + b^2 + c^2$.

4) quindi $d(P, \pi) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$\square$